

TD 5 Cinématique

Compétences travaillées :

- Réaliser un graphe de structure du mécanisme,
- Réaliser un schéma cinématique lorsque la modélisation des liaisons est connue,
- Écrire la fermeture géométrique pour obtenir la loi entrée-sortie d'une chaîne fermée simple,
- Écrire les relations de fermeture cinématique,
- Déterminer le torseur cinématique d'un solide par rapport à un autre,
- Déterminer la trajectoire d'un point d'un solide par rapport à un autre,
- Déterminer l'accélération (tout ou composante) d'un point d'un solide par rapport à un autre,
- Résoudre un problème de manière analytique ou graphique.

1 Étude du déploiement d'une échelle de pompiers¹

Une E.P.A.S. est une Echelle Pivotante Automatique à commande Séquentielle. Ce système conçu et commercialisé par la société CAMIVA est monté sur le châssis d'un camion de pompiers (voir Figure 1) et permet de déplacer une plate-forme pouvant recevoir deux personnes et un brancard le plus rapidement possible et en toute sécurité.

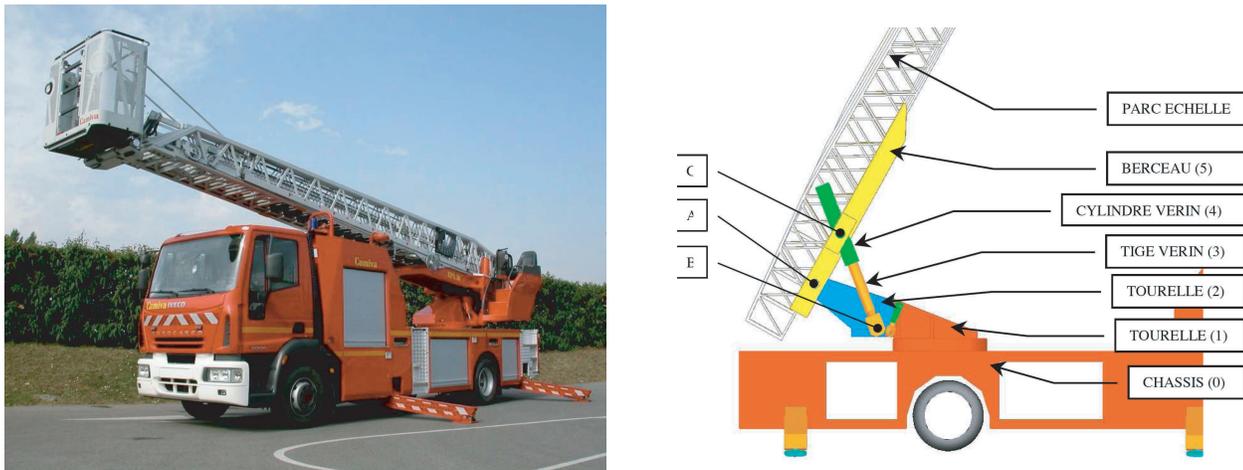


FIGURE 1 – E.P.A.S. sur camion de pompiers.

Le déplacement de la plate-forme est réalisé suivant trois axes (voir Figure 1) :

- Le déploiement du parc échelle (axe 1) : Chaque plan de l'échelle peut se translater par rapport aux autres ; seul le quatrième plan d'échelle est solidaire du berceau.

1. adapté du sujet CCP PSI 2007

- Le pivotement autour de l'axe Y (axe 2) : La tourelle 1 peut pivoter par rapport au châssis autour d'un axe vertical.
- La rotation autour de l'axe Z (axe 3) : Le berceau peut tourner par rapport à la tourelle 2 autour d'un axe horizontal.

Pour garantir la sécurité, le système maintient toujours la plate forme en position horizontale :

- La correction d'aplomb oriente la plate-forme autour d'un axe horizontal parallèle à l'axe Z.
- La correction de devers oriente l'ensemble parc échelle et plate-forme autour de l'axe X : la tourelle 2 s'oriente par rapport à la tourelle 1 suivant un axe perpendiculaire aux axes 3 et 2.

Lors des déplacements suivant les axes 2 et 3, le système « VARIMAX » de commande des actionneurs maintient la vitesse de la plate-forme la plus constante possible afin de limiter les mouvements de balancier qui résulteraient d'une commande trop « brusque ».

On se propose de vérifier quelques performances énoncées dans l'extrait du Cahier des Charges suivant.

Fonction de service	Critère	Niveau
FS1 : Déplacer la plate-forme	Rapidité	temps de déploiement < 15 s
	Confort	vitesse de la plate-forme constante
	Sécurité	stabilité en position horizontale impérative

TABLE 1 – Extrait du CdCF.

1.1 Dimensionnement des vérins du système de dressage : vérification du critère de confort

Objectif : L'objet de cette partie est de déterminer la commande que le système « VARI-MAX » doit élaborer pour que la vitesse de déplacement de la plate-forme soit constante lors du dressage ou de l'abaissement et respecte le critère de confort du CdC. Pour cela, nous allons déterminer le débit d'huile injectée dans le vérin pour que la vitesse des points de la plate-forme soit constante.

Pendant la phase de dressage, les tourelles 1 et 2 sont fixes par rapport au châssis du camion ; seul le berceau pivote autour de l'axe A, entraînant avec lui le parc échelle et la plate-forme. Ce mouvement est obtenu grâce aux vérins hydrauliques articulés en B et C avec la tourelle 2 et le berceau.

On propose le paramétrage suivant (voir Figure 2) :

Le repère $R_0 = (O_0, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ est lié au châssis 0.

Le repère $R_5 = (A, \vec{x}_5, \vec{y}_5, \vec{z}_0)$ est lié à l'ensemble berceau+parc échelle 5 ;

$$\text{avec } \overrightarrow{O_0A} = a\vec{y}_0 \text{ et } (\vec{x}_0, \vec{x}_5) = \theta ; \overrightarrow{AC} = c\vec{x}_5 ; \overrightarrow{AD} = H\vec{x}_5.$$

Le repère $R_3 = (B, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_0)$ est lié au vérin 3 + 4 ;

$$\text{avec } \overrightarrow{O_0B} = b\vec{x}_0 ; \overrightarrow{BC} = r\vec{y}_3 \text{ et } (\vec{x}_0, \vec{x}_3) = \beta.$$

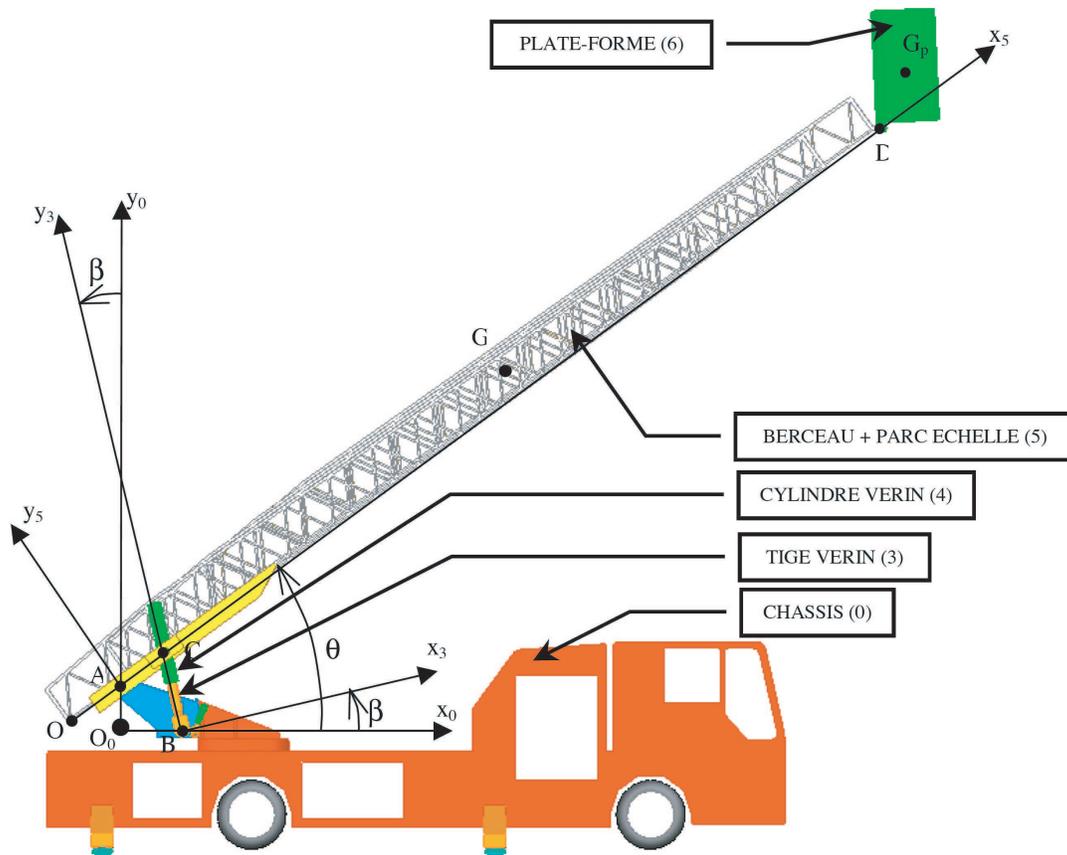


FIGURE 2 – Paramétrage du mouvement étudié.

On donne les caractéristiques du vérin :

- Débit volumique d'huile injectée dans le vérin : Q ,
- Diamètre du piston : d ,
- Vitesse de déploiement du vérin : V .

1. Donner le torseur cinématique de chaque liaison (quatre liaisons).
2. Construire le graphe de structure du mécanisme et tracer le schéma cinématique.
3. Exprimer la vitesse du point D du parc échelle dans son mouvement par rapport au châssis $\vec{V}(D, 5/0)$ en fonction de la vitesse angulaire de dressage $\dot{\theta}$ et des paramètres géométriques.
4. Écrire l'équation vectorielle de fermeture cinématique en vitesse au point C et dessiner chacune des vitesses sur la figure.
5. Projeter cette équation sur le vecteur \vec{y}_3 et en déduire la vitesse de sortie du vérin $\vec{V}(C, 4/3) = V\vec{y}_3$ en fonction de la vitesse angulaire de dressage $\dot{\theta}$ et des paramètres géométriques.
6. Établir la relation $\tan(\beta) = \frac{b - c\cos(\theta)}{a + c\sin(\theta)}$ en écrivant une fermeture de chaîne géométrique.
7. Déduire des questions précédentes le débit d'huile injectée dans le vérin Q en fonction de la vitesse V_D du point D, de θ et des constantes a , b , c , d et H pour que la vitesse

du point D du parc échelle soit constante. Cela correspond au critère du CdC imposé pour le dimensionnement de la partie commande du système.

1.2 Vérification du critère de rapidité : étude du déploiement du parc échelle

Objectif : On se propose de vérifier le critère de rapidité du CdC en étudiant le déploiement du parc échelle.

Le parc échelle est constitué de quatre plans numérotés de 1 à 4 : La plate-forme est montée sur le plan n°1 ; le plan n°4 est solidaire du berceau. Lors du déploiement du parc échelle, un treuil met en mouvement le câble principal qui entraîne le plan n°3 du parc échelle. Les plans n°1 et n°2 seront déployés grâce au mouvement du plan n°3 et aux câbles secondaires.

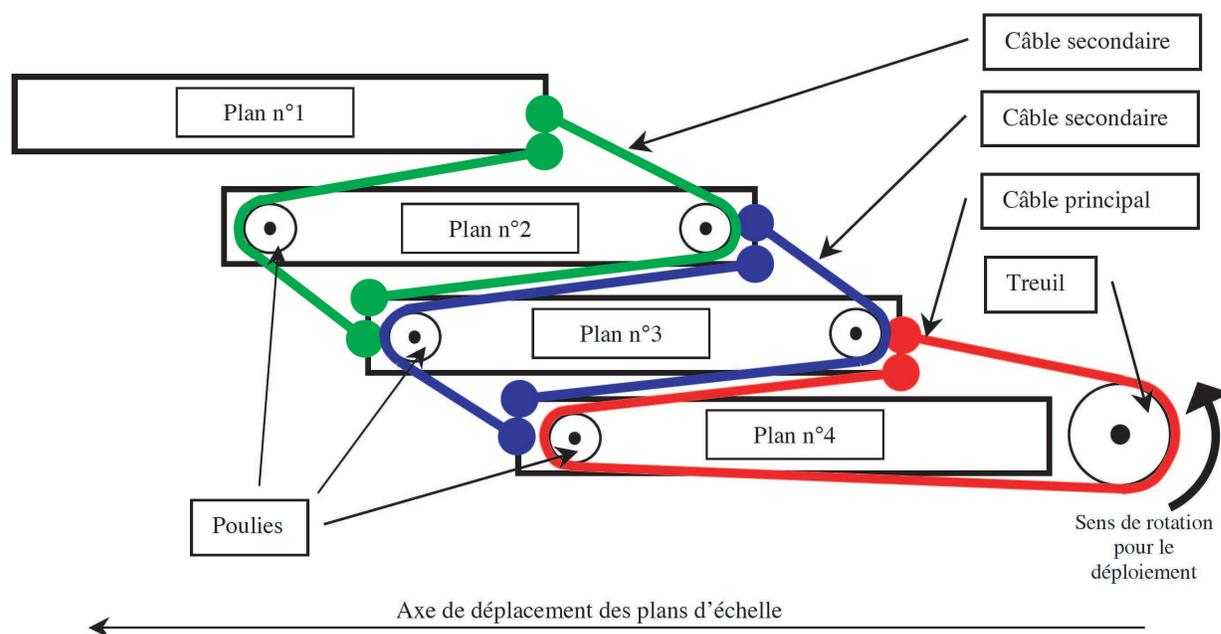


FIGURE 3 – Plans du parc échelle.

La figure 3 montre les plans du parc échelle les uns au dessus des autres. En réalité, ils sont les uns dans les autres et tous les brins de câbles sont donc parallèles à l'axe de déplacement des plans d'échelle.

Le câble principal s'enroule sur un treuil de rayon $R = 20 \text{ cm}$ tournant à une fréquence de rotation nominale de $N = 30 \text{ tr/min}$.

On suppose qu'il n'y a pas de glissement entre le câble principal et le treuil, ainsi qu'entre les poulies et les câbles secondaires.

Chaque plan a une longueur $L = 9 \text{ m}$. Lorsque le parc échelle est entièrement déployé, chaque plan recouvre le suivant d'une longueur de 2 m .

1. Donnez l'expression littérale de la vitesse des points du plan n°3 dans son mouvement par rapport au plan n°4 en fonction de R et N . Calculez cette vitesse en m/s .

2. Montrez que la vitesse des points du plan $n^{\circ}2$ dans son mouvement par rapport au plan $n^{\circ}4$ est deux fois plus grande que la vitesse des points du plan $n^{\circ}3$ par rapport au plan $n^{\circ}4$ (on pourra utiliser un raisonnement graphique). Quelle est alors la vitesse du plan $n^{\circ}1$ par rapport au plan $n^{\circ}4$.
3. Calculez le temps nécessaire pour déployer entièrement le parc échelle si la vitesse de rotation du treuil reste constante. Conclure quant au respect du cahier des charges.

2 Table élévatrice industrielle

Les tables élévatrices industrielles (voir Figure 4) peuvent avoir diverses fonctions, pour effectuer des travaux en hauteur comme les peintures d'extérieur.

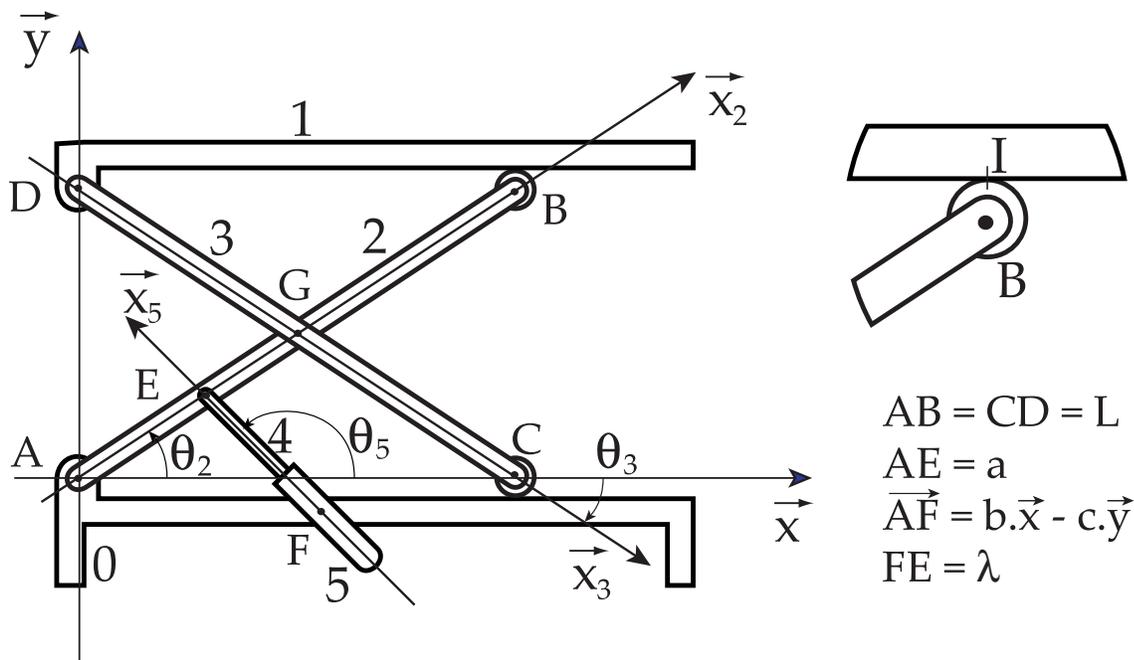
Objectif : L'exercice propose d'effectuer une étude préalable au dimensionnement du vérin en déterminant la vitesse de la plateforme V_1 en fonction de la vitesse V de sortie du vérin (corps 5 et tige 4).



FIGURE 4 – Table élévatrice industrielle ACI.

1. Montrer géométriquement que la plateforme 1 est en translation par rapport au socle 0.
2. Comment peut-on modéliser simplement la roulette en B par une liaison entre 1 et 2 ? Proposer une liaison parfaite et dessiner la modélisation équivalente avec le paramétrage. Préciser le torseur cinématique de la liaison.
3. Déterminer les torseurs cinématiques des liaisons pivot en A , E et F ainsi que de la liaison glissière. Déterminer quelles conditions sur les vitesses sont imposées par les contacts en B et C .
4. En appelant V_1 la vitesse de translation de la plateforme 1, déterminer la relation entre V_1 et θ_2 .

5. Ecrire la fermeture cinématique pour la boucle (A, E, F) . Déterminer le nombre d'équations disponibles et le nombre d'inconnues.
6. Déterminer l'équation en vitesses de rotation.
7. Réduire les torseurs cinématiques en E . En déduire l'équation en vitesse.
8. Projeter l'équation des vitesses sur \vec{x}_5 et en déduire une relation entre V et V_1 (en fonction des paramètres de géométrie).
9. Effectuer la résolution graphique en expliquant les étapes clés.



3 Palettiseur pour l'industrie laitière

La vente du lait sous forme de brique de 1l nécessite une chaîne de conditionnement. La chaîne reçoit en entrée le lait depuis des réservoirs de stockage et fournit en sortie des palettes de briques prêtes à être chargées en camion pour la livraison.

Dans son parcours tout au long de la chaîne, le lait sera tout d'abord stérilisé (à ultra haute température) puis placé dans les briques (2*6000 briques / heures). Les briques sont alors suremballées par lots de 6 puis palettisées. Enfin les palettes sont housées et stockées en attendant le chargement.

Les palettes sont constituées de 6 couches, comportant 6*4 lots. Nous nous intéresserons au poussoir de rangées qui transfère les rangées unes par unes sur le plateau de dépose pour constituer une couche.

On se propose de dimensionner le motoréducteur permettant de vérifier les performances énoncées dans l'extrait du Cahier des Charges suivant.

Le schéma cinématique est donné figure 5. Le bâti 1 est fixe. Un motoréducteur anime en rotation la manivelle 2. Par l'intermédiaire d'une liaison en B , la manivelle 2 déplace la tige 3 en rotation autour de A , qui déplace elle-même le poussoir 4 en translation d'axe \vec{y} .

Fonction de service	Critère	Niveau
FS1 : Transférer des palettes	Cadence	12000 briques de lait par heure
	Contenance des palettes	6 couches de 4 lots de 6 briques de 1 litre

TABLE 2 – Extrait du CdCF.

$$\begin{aligned}
 (\vec{x}, \vec{u}) &= \theta_2 \\
 (\vec{x}, \vec{i}) &= \theta_3 \\
 \vec{HA} &= L \cdot \vec{x} \\
 \vec{OA} &= l \cdot \vec{x} \\
 \vec{OB} &= e \cdot \vec{u} \\
 \vec{HC} &= y \cdot \vec{y} \\
 \vec{AB} &= \lambda \cdot \vec{i} \\
 \vec{AC} &= \mu \cdot \vec{i}
 \end{aligned}$$

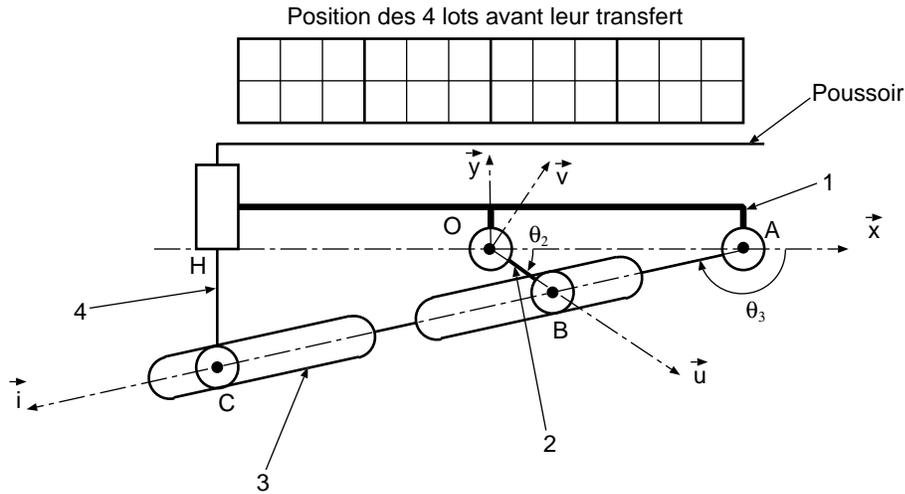


FIGURE 5 – Schéma cinématique du système.

1. Évaluer la vitesse de rotation en sortie du motoréducteur pour assurer la cadence du Cahier des Charges.
2. Construire le graphe de structure du mécanisme.
3. Proposer des modèles de liaisons parfaites entre ces ensembles et donner, dans le plan, les torseurs cinématiques associés.
4. Combien de mobilités (nombre de paramètres indépendants décrivant le mouvement) le mécanisme possède-t-il ? Combien de boucles indépendantes y a-t-il dans le mécanisme ?
5. Écrire les fermetures géométriques et en déduire les relations entre θ_2 , θ_3 , y , λ et μ en projetant sur la base (\vec{i}, \vec{j}) .
6. Écrire les fermetures cinématiques sous forme torsorielle puis sous forme vectorielle en choisissant le point A de réduction des vitesses.
7. Projeter les équations précédentes sur les axes les plus appropriés pour exprimer la loi entrée/sortie du mécanisme, c'est à dire calculer les inconnues du torseur cinématique 4/1 en fonction de la vitesse de rotation du moteur $\omega_{2/1}$ et des paramètres de position.

Ce résultat, couplé à une étude de la puissance de sortie à fournir, permettrait de dimensionner le motoréducteur en puissance et donc en couple.