

TD 1 : Cinématique

1. Dérivation de vecteurs de bases

On considère trois bases B_0 , B_1 et B_2 telles que :

- B_1 est en rotation d'angle α autour de $\vec{z}_0 = \vec{z}_1$,
- B_2 est en rotation d'angle θ autour de $\vec{y}_1 = \vec{y}_2$,

1. Ecrire les vecteurs de rotation : $\vec{\Omega}_{1/0}$, $\vec{\Omega}_{2/1}$ et $\vec{\Omega}_{2/0}$.

2. Exprimer \vec{z}_2 dans la base B_0 .

3. Calculer $\frac{d\vec{x}_1}{dt}/B_0$, $\frac{d\vec{y}_2}{dt}/B_0$, $\frac{d\vec{z}_2}{dt}/B_1$, $\frac{d\vec{z}_2}{dt}/B_0$ et $\vec{x}_0 \cdot \frac{d\vec{x}_2}{dt}/B_0$.

2. Hélicoptère

La vitesse des hélicoptères est bien inférieure à celle des avions car elle est limitée par un critère simple : la vitesse en bout de pale ne doit pas dépasser la vitesse du son. On souhaite déterminer la *vitesse maximale théorique d'un hélicoptère*.

On considère un hélicoptère 1 se déplaçant à la vitesse horizontale $\vec{V}_{1/0} = V \cdot \vec{x}_0$ constante par rapport au sol 0. Soit $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe par rapport au sol et $R_1(A, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ un repère fixe par rapport à l'hélicoptère, où A est le point au centre du rotor (figure 2). On note $\vec{OA} = h \cdot \vec{z}_0 + \lambda(t) \cdot \vec{x}_0$ où h est une constante.



FIG. 1 – Hélicoptère.

Le rotor principal 2 de l'hélicoptère comporte 4 pales. Soit $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ un repère en rotation par rapport à R_1 d'un angle θ autour de l'axe (A, \vec{z}_0) . On note la vitesse constante du rotor par rapport à l'hélicoptère $\dot{\theta} = \omega$. Soit M le point situé à l'extrémité d'une pale. \vec{x}_2 est choisi tel que $\vec{AM} = R \cdot \vec{x}_2$.

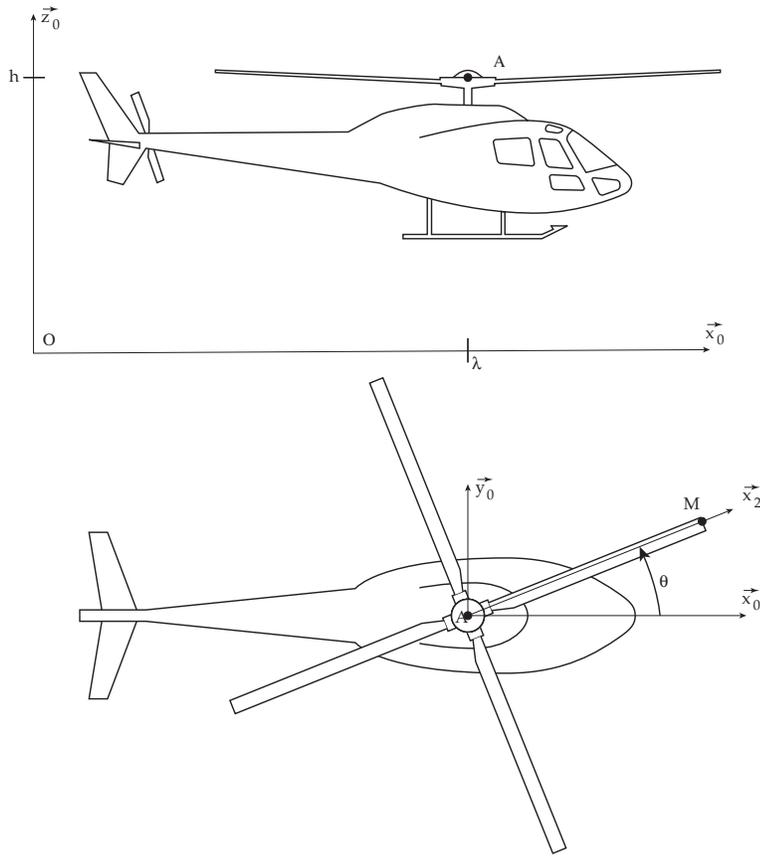


FIG. 2 – Paramétrage.

1. Déterminer le vecteur position du point M dans le référentiel R_0 .
2. Déterminer le vecteur vitesse du point M du rotor 2 par rapport au sol 0.
3. Donner le torseur cinématique de l'hélicoptère par rapport au sol $\{V1/0\}$ et le torseur cinématique du rotor par rapport à l'hélicoptère $\{V2/1\}$.
4. En déduire le torseur cinématique du rotor par rapport au sol $\{V2/0\}$ et retrouver par cette méthode le résultat de la question 2.
5. Déterminer l'expression de la vitesse maximal V_{max} en M de 2/0 au cours du mouvement en fonction de V , ω et R , en précisant pour quel position ce maximum est atteint.
6. Sachant que la vitesse du rotor vaut $\omega = 384 \text{ tr/min}$, le rayon du rotor (longueur d'une pale) vaut $R = 4.5 \text{ m}$ et que la vitesse de la pale ne doit jamais dépasser la vitesse du son, déterminer la vitesse maximale V de l'hélicoptère par rapport au sol (le résultat sera donné en km/h ; on suppose qu'il n'y a pas de vent).

3. Robot ABB

La société ABB conçoit et réalise des robots de manutention (figure 3). Ce robot admet différents types d'outils à son extrémité (pince de soudage, pistolet de peinture, pince de préhension, etc...) Pour manipuler des objets légers et fragiles, on utilise une ventouse reliée à une pompe à vide.

Pour des raisons de cadence, les mouvements du robots sont rapides. Mais des mouvements trop brusques peuvent entraîner un glissement de l'objet sur la ventouse, voire sa chute. Le cas le plus défavorables est généralement sur l'axe vertical, lorsque les effets d'inertie se cumulent au poids de l'objet. On admet qu'un calcul d'efforts au niveau de la ventouse a permis de fixer l'accélération verticale maximale à $3g$.

Le robot repose sur un socle 0 et comporte 4 bras : 1, 2, 3 et 4 en rotation les uns par rapport aux autres.

Le paramétrage tridimensionnel est donné figure 4. Un schéma cinématique dans le plan $(O, \vec{x}_1, \vec{z}_0)$ est donné figure 5. Attention, les angles ne sont pas tous positifs sur le dessin ; veillez à l'orientation des axes.



FIG. 3 – Vue du robot.

On supposera dans cette partie que 5 est immobile par rapport à 4.

- 1 est en rotation par rapport à 0 autour de l'axe (O, \vec{z}_0) , paramétrée par α_1 .
- 2 est en rotation par rapport à 1 autour de l'axe (O_1, \vec{y}_1) , paramétrée par α_2 .
- 3 est en rotation par rapport à 2 autour de l'axe (O_2, \vec{y}_1) , paramétrée par α_3 .

On note $OA = h = 0.4 \text{ m}$, $AB = H = 1 \text{ m}$ et $BC = L = 1 \text{ m}$.

1. Exprimer le vecteur position \vec{OP} .
2. Calculer la vitesse $\vec{V}_{P,5/0} = \frac{d\vec{OP}}{dt} / R_0$ en fonction des vitesses de rotation de chacun des bras et des paramètres de géométrie.
3. Calculer la composante verticale de l'accélération $\vec{z}_0 \cdot \vec{\Gamma}_{P,5/0} = \vec{z}_0 \cdot \frac{d\vec{V}_{P,5/0}}{dt} / R_0$ en fonction des vitesses et accélérations de chacun des bras et des paramètres de géométrie.
4. Faites l'application numérique en utilisant les données suivantes et conclure sur le risque de glissement de l'objet.

Données : $\alpha = 0^\circ$, $\ddot{\alpha} = 0 \text{ rad/s}^2$, $\dot{\alpha} = 0 \text{ rad/s}$, $\beta = 45^\circ$, $\dot{\beta} = 2 \text{ rad/s}$, $\ddot{\beta} = -10 \text{ rad/s}^2$,
 $\gamma = 60^\circ$, $\dot{\gamma} = 1 \text{ rad/s}$, $\ddot{\gamma} = -5 \text{ rad/s}^2$,

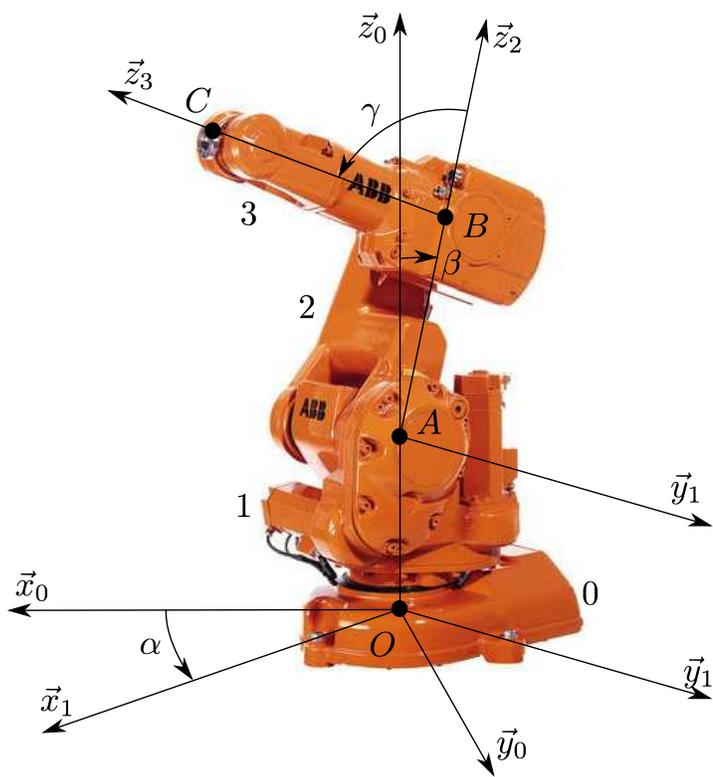


FIG. 4 – Mécanisme interne.

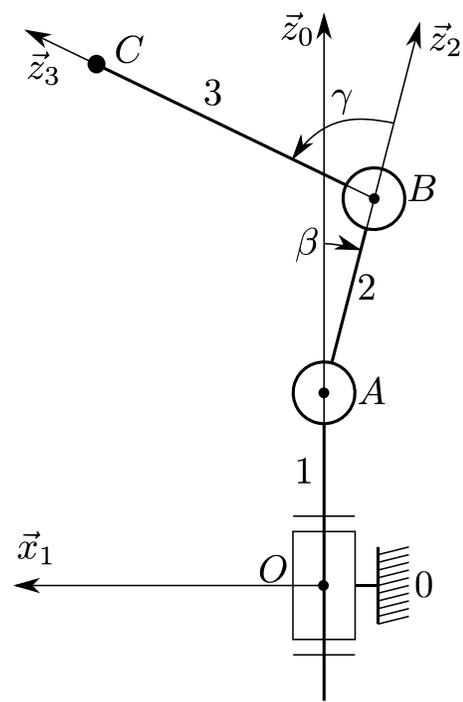


FIG. 5 – Schéma cinématique.