

# DM : Calcul vectoriel pour la cinématique

## 1 Grue de déchargement d'un porte-conteneur

Les porte-conteneurs sont les maillons indispensables aux échanges commerciaux à travers le monde. Les porte-conteneurs actuels peuvent transporter jusqu'à 13 000 conteneurs. Des grues adaptées permettent dans les plus grands ports mondiaux de charger ou décharger les conteneurs. La figure 1 montre les grues de déchargement du port de Marseille.



FIGURE 1 – Navire en déchargement au port de Marseille

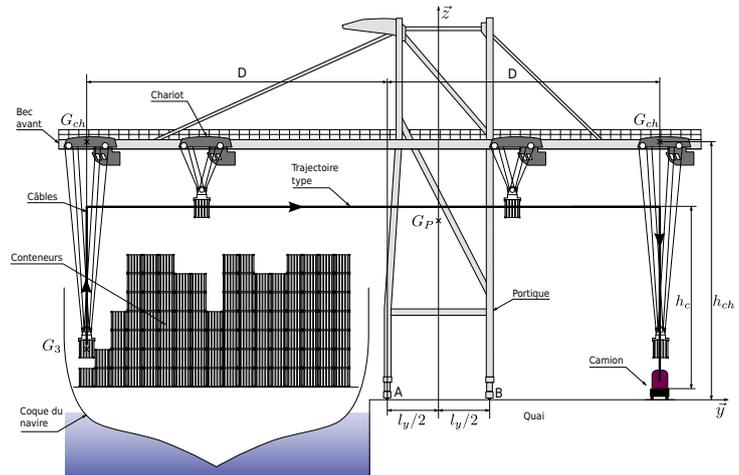


FIGURE 2 – Vue latérale de la grue de déchargement

Un spreader s'accroche aux conteneurs afin de les extraire des cales et les amener vers le quai pour les poser sur un camion qui se charge d'évacuer le conteneur vers les stocks arrière (figure 2).

L'élaboration des lois de commande du chariot est relativement complexe car le conteneur a une tendance naturelle à balancer. Or, il doit être parfaitement stabilisé avant d'être posé sur le camion.

La figure 3 propose un paramétrage pour l'étude du mouvement du conteneur au cours du transfert vers le quai. La variable  $y_{ch}(t)$  paramètre le mouvement du chariot (1), tandis que les angles  $\theta(t)$  et  $\beta(t)$  paramètrent le mouvement de balancement du câble (2) et du conteneur (3). Les longueurs  $EF$  et  $FG_3$  sont respectivement notées  $L = 60\text{ m}$  et  $h = 3\text{ m}$  et les rotations sont portées par  $\vec{x}_0$ .

Pour calculer les lois de commandes, il est nécessaire de connaître l'accélération du centre de gravité en fonction des paramètres  $y_{ch}(t)$ ,  $\theta(t)$  et  $\beta(t)$ .

**Q.1.** Déterminer le vecteur position  $\overrightarrow{OG_3}$ .

**Q.2.** Tracer sur un même diagramme de changement de base les vecteurs des bases 0, 2 et 3, et les angles  $\theta$  et  $\beta$ .

**Q.3.** Projeter les vecteurs  $\vec{y}_2$  et  $\vec{y}_3$  dans la base 0. Projeter le vecteur  $\vec{y}_0$  dans la base 3.

**Q.4.** Projeter le vecteur position dans la base  $(\vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Montrer alors que pour des angles de balancement  $\theta$  et  $\beta$  de l'ordre de  $10^\circ$ , le déplacement vertical est très petit devant le déplacement horizontal (on prendra  $y_{ch} = 0$  pour cette application numérique).

**Q.5.** En admettant que le conteneur doit être posé sur le camion avec une précision de l'ordre de 20 cm, déterminer l'ordre de grandeur de l'angle de balancement admissible avant de poser le conteneur sur le camion (on supposera  $y_{ch} = 0$  et  $\beta = 0$  pour cette question).

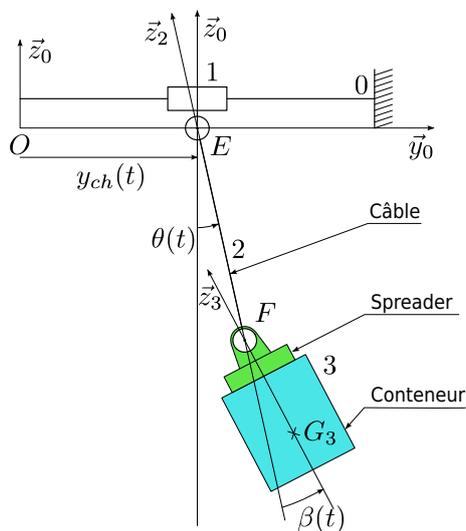


FIGURE 3 – Modélisation du mouvement du centre de gravité du conteneur.

Les vecteurs vitesses de rotation s'écrivent  $\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\theta} \cdot \vec{x}_0$ ,  $\vec{\Omega}_{3/2} = \dot{\beta} \cdot \vec{x}_0$  et  $\vec{\Omega}_{3/0} = (\dot{\theta} + \dot{\beta}) \cdot \vec{x}_0$

**Q.6.** Justifier brièvement la forme de ces vecteurs vitesses de rotation.

**Q.7.** Déterminer les expressions de  $\frac{d\vec{z}_2}{dt}/B_0$  dans la base 2 et de  $\frac{d\vec{y}_3}{dt}/B_0$  dans la base 3.

**Q.8.** Déterminer l'expression de la vitesse  $\vec{V}_{3/0}(G_3) = \frac{d\vec{OG}_3}{dt}/B_0$ .

**Q.9.** Déterminer l'accélération  $\vec{\Gamma}_{3/0}(G_3) = \frac{d\vec{V}_{3/0}(G_3)}{dt}/B_0$ .

**Q.10.** Projeter l'accélération  $\vec{\Gamma}_{3/0}(G_3)$  dans la base 2.

Ces expressions permettent d'élaborer l'équation du mouvement du conteneur, pour ensuite mettre en place les lois de commande de la grues.

## 2 Centrifugeuse de laboratoire

Afin d'accélérer le processus de précipitation ou de séparation de composés dans l'industrie alimentaire, dans les laboratoires pharmaceutiques ou les laboratoires de chimie, les produits sont placés en centrifugeuse.

Ces processus qui auraient mis plusieurs jours à s'effectuer sous la seule gravité terrestre mettent quelques minutes lorsque l'éprouvette est soumise à une accélération de 10 000 G... Certaines centrifugeuses utilisées pour la séparation des protéines et des acides nucléiques montent à des accélérations de 200 000 G.

Le repère lié au bâti de la centrifugeuse est noté  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ . Un repère lié au rotor (1) est noté  $R_1(O, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ . Le mouvement de rotation du rotor (1) par rapport au bâti (0) autour de  $\vec{z}_0$  est paramétré par l'angle  $\theta = (\vec{x}_0, \vec{x}_1)$ . Un repère lié à l'éprouvette (2) est noté  $R_2(A, \vec{x}_2, \vec{y}_2, \vec{z}_2)$ . Le mouvement de rotation de l'éprouvette (2) par rapport au rotor (1) autour de  $\vec{y}_1$  est paramétré par l'angle  $\varphi = (\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ . Les distances  $OA$  et  $AB$  sont respectivement notées  $R = 15 \text{ cm}$  et  $L = 10 \text{ cm}$ .

**Q.11.** Déterminer le vecteur position  $\vec{OB}$ .

**Q.12.** Tracer les deux diagrammes de changement de base.

**Q.13.** Déterminer la projection du vecteur  $\vec{z}_2$  dans la base 0.



FIGURE 4 – Photographies d’une centrifugeuse et de son rotor.

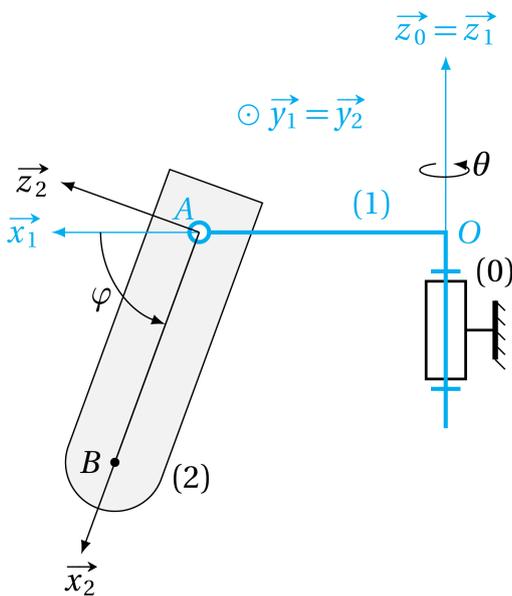


FIGURE 5 – Paramétrage du mouvement de la centrifugeuse.

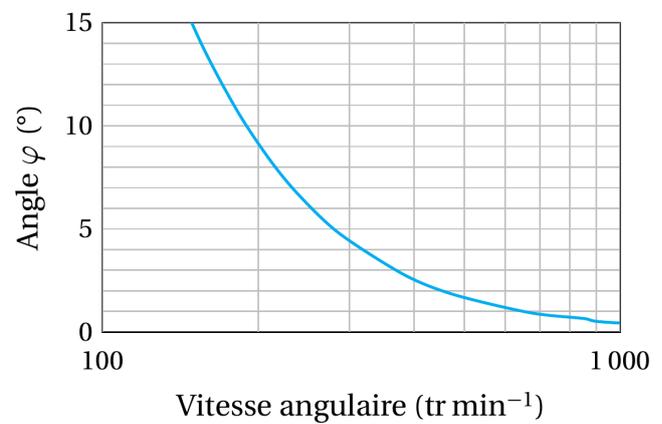


FIGURE 6 – Évolution de l’angle  $\varphi$  en fonction de la vitesse de rotation.

- Q.14.** Déterminer la projection de  $\vec{y}_0$  dans la base 2.
- Q.15.** Pour déterminer la distance du point B à l’axe de rotation, déterminer la projection du vecteur  $\vec{OB}$  sur  $\vec{x}_1$ .
- Q.16.** Déterminer l’expression de  $\vec{x}_2 \wedge \vec{x}_0$ .
- Q.17.** Déterminer les vecteurs vitesses de rotation  $\vec{\Omega}_{1/0}$ ,  $\vec{\Omega}_{2/1}$  et en déduire l’expression :  $\vec{\Omega}_{2/0} = \dot{\varphi}\vec{y}_1 + \dot{\theta}\vec{z}_0$ .
- Q.18.** Déterminer l’expression de la vitesse  $\vec{V}_{2/0}(B)$ .
- Q.19.** Déterminer l’expression de l’accélération  $\vec{\Gamma}_{2/0}(B)$ .
- Lorsque la machine tourne à vitesse constante  $\dot{\theta} = \omega$  et se trouve en régime établi, l’angle  $\varphi$  reste constant et suit la loi donnée figure 6.
- Q.20.** Déterminer la valeur numérique de l’accélération du point B appartenant à l’éprouvette, par rapport au bâti de la centrifugeuse pour une vitesse de rotation de 200 tr/min. Vérifier l’ordre de grandeur annoncé pour une vitesse de rotation de 10 000 tr/min.

### 3 Imprimante 3D parallèle

Une imprimante 3D est une machine permettant de fabriquer des pièces volumiques par ajout de matière, c'est à dire en déposant des fines couches successives de plastiques afin de former un objet(7).

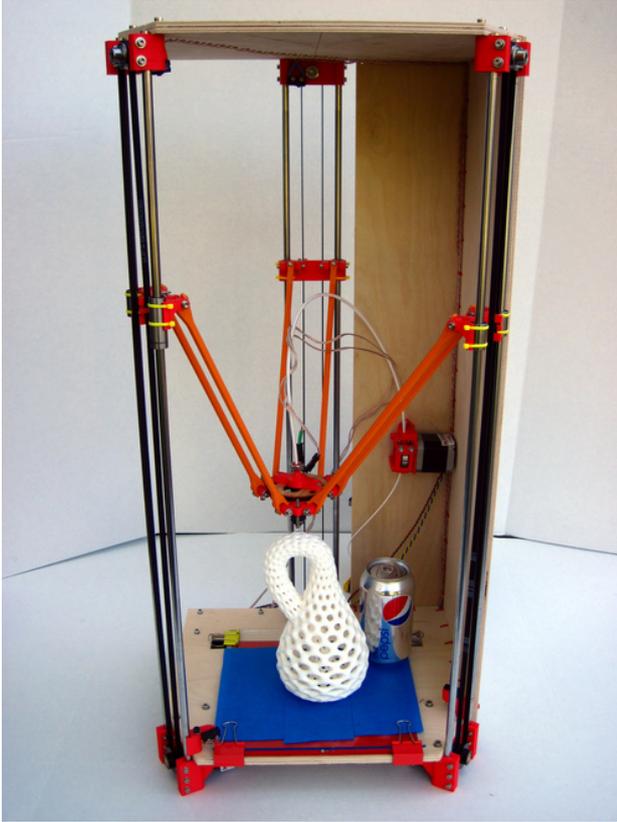


FIGURE 7 – Imprimante 3D

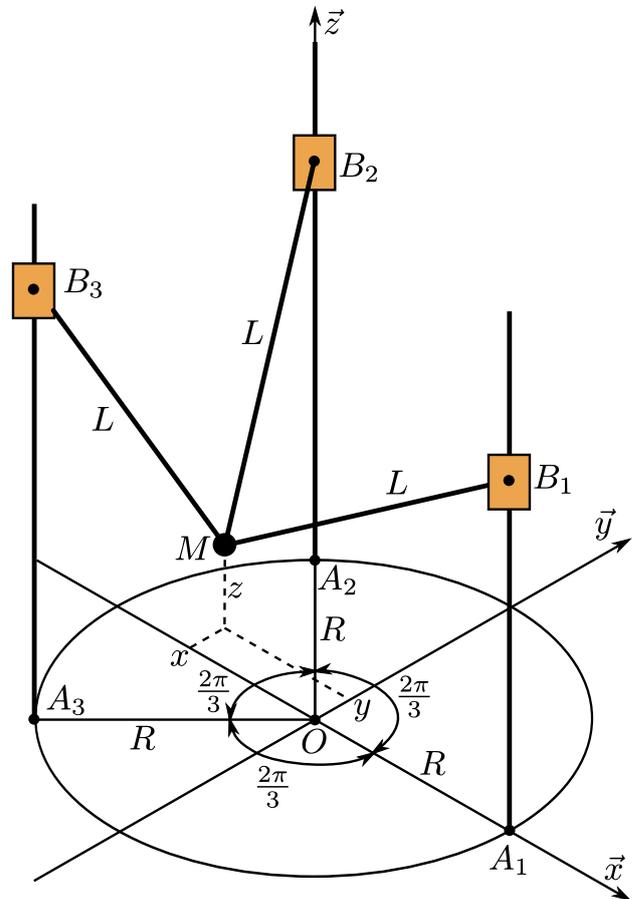


FIGURE 8 – Paramétrage de l'imprimante 3D

Une imprimante 3D parallèle s'appuie sur une architecture à 3 barres rigides (figure 8) de longueurs  $L$  commandées par 3 moteurs linéaires pour déplacer le centre de la tête d'impression  $M$ . Les déplacements des moteurs sont paramétrés par les longueurs  $\lambda_i(t)$  telles que  $\overrightarrow{A_i B_i} = \lambda_i(t) \vec{z}$ .

L'objectif est ici de déterminer les lois de commande des 3 moteurs linéaires permettant de déplacer  $M$  à une position  $(x, y, z)$  précise de l'espace.

**Q.21.** Déterminer les coordonnées des points  $A_1$ ,  $A_2$  et  $A_3$ .

**Q.22.** Déterminer l'expression du vecteur  $\overrightarrow{M B_1}$ .

**Q.23.** Sachant que la longueur  $M B_1$  est égale à  $L$ , déterminer l'expression de  $\lambda_1$  en fonction de  $x, y, z$  et des caractéristiques de longueur de la machine.