

Systemes de numération et codage

Objectifs du cours : Après avoir étudié ce cours, vous devez être capable :

- d'exprimer un nombre et de calculer dans différentes bases de numération,
- d'identifier les performances attendues des méthodes de codage des données.

1 Expression des nombres en binaire et hexadécimal

base 10	base 2	base 16
0	0	0
1	1	1
2	10	2
3	11	3
4	100	4
5	101	5
6	110	6
7	111	7
8	1000	8
9	1001	9
10	1010	A
11	1011	B
12	1100	C
13	1101	D
14	1110	E
15	1111	F

Tout nombre entier positif peut s'exprimer à l'aide des dix chiffres de 0 à 9 en base 10. Par exemple :

$$23 = 2 \times 10^1 + 3 \times 10^0$$

De même, tout nombre entier positif peut s'exprimer à l'aide des deux chiffres 0 et 1 en base 2 (binaire) ou de 16 chiffres en base 16 (hexadécimal).

Pour distinguer les bases, elles sont indiquées en indice :

- $8_{10} = 1000_2$,
- $16_{10} = 10_{16}$.

Passage de la base binaire à la base décimale

$$1010_2 = (1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 1 \times 2^1 + 0 \times 2^0)_{10} = 10_{10}$$

Passage de la base décimale à la base binaire

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline \textcircled{0} & 4 & 2 & 2 \\ & \textcircled{1} & 2 & \textcircled{1} \\ & & \textcircled{0} & \end{array}$$

$$10_{10} = 1010_2$$

$$\begin{array}{r|l} 23 & 2 \\ \hline 11 & 2 \\ \hline 03 & 10 & 5 & 2 \\ & \textcircled{1} & 4 & 2 & 2 \\ & & \textcircled{1} & 2 & \textcircled{1} \\ & & & \textcircled{0} & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 23 & 16 \\ \hline 16 & 1 & 16 \\ \hline \textcircled{7} & 0 & 0 \\ & \textcircled{1} & \end{array}$$

$$23_{10} = 10111_2 = 17_{16}$$

2 Opérations sur les nombres binaires et hexadécimaux

2.1 Addition

Décimal	Binaire	Hexadécimal
23	1 ¹ 0 ¹ 1 ¹ 11	1 ¹ 7
+ 10	+ 1 0 10	+ 0 A
33	10 0 0 01	2 1

2.2 Soustraction

Décimal	Binaire	Hexadécimal
23	1 ₁ 0111	1 ₁ 7
- 10	- ₁ 1010	- ₁ A
13	0 1101	0D

2.3 Multiplication

Décimal	Binaire
23	1 0 1 1 1
× 3	× 1 1
69	1 ¹ 1 ⁰ 1 ¹ 1 ¹ 11
	+ 10 1 1 10
	100 0 1 01

2.4 Division

Décimal	Binaire
23 3	10111 11
- 2 7.6666	- 11 111,101010
020	0101
-18	- 11
2	101
	- 11
	100
	- 11
	100

3 Codage de l'information

Coder une information revient à fixer une convention permettant de lire et écrire cette information sans ambiguïté.

Les chiffres arabes sont notre code humain pour les données numériques. Ce code est peu approprié aux machines.

Les systèmes automatiques exploitent des codes basés sur le binaire pour des raisons d'architecture. Les qualités requises pour un code sont principalement :

- La taille du codage (nombre de bits (binary digit) nécessaires),
- la fiabilité de lecture,
- la simplicité de manipulation.

3.1 Le code binaire naturel

Il permet de coder les nombres. C'est le seul code qui permette de réaliser les opérations. La taille de codage est optimale (minimum de bits pour coder un nombre).

Remarque : il faut 4 bits pour coder un chiffre entre 0 et 9.

3.2 Le code binaire réfléchi (ou code Gray)

Hexadécimal	Gray
0	0000
1	0001
2	0011
3	0010
4	0110
5	0111
6	0101
7	0100
8	1100
9	1101
A	1111
B	1110
C	1010
D	1011
E	1001
F	1000

Il permet de coder les nombres. Le passage d'un nombre au suivant se fait en changeant la valeur d'un seul bit.

Il est utilisé dans les capteurs de position absolu et évite les sources d'erreur dans les positions intermédiaires.

La taille de codage est optimale.



3.3 Le code 3 parmi 5

Ce code consiste à choisir 3 bits à 1 parmi 5 bits. Le nombre de combinaisons vaut :

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!(5-3)!} = 10.$$

Il permet donc de coder les dix chiffres décimaux.

Décimal	3 parmi 5
0	00111
1	01011
2	01101
3	01110
4	10011
5	10101
6	10110
7	11001
8	11010
9	11100

Avantages :

- auto-détection d'erreurs de lecture,
- Codage personnalisable (10! possibilités).

Inconvénients :

- la taille du codage n'est pas optimale (5 bits pour un chiffre décimal),
- toute opération nécessite un décodage préalable.

Ce code ci-dessous est celui utilisé à la poste pour la lecture du code postal. Le code indiqué a été copié sur une lettre arrivée au lycée. Vous devriez retrouver 75 005, qui nécessite 17 bit de codage.



3.4 Code décimal codé binaire (DCB)

Chaque chiffre décimal est codé en binaire sur 4 bits. Ce code est utilisé sur les afficheurs 7 segments. Chaque afficheur reçoit le chiffre codé en binaire.

Décimal	2	0	0	5
DCB	0010	0000	0000	0101



Avantages :

- le code est plus proche de la base 10,
- les opérations peuvent être adaptées.

Inconvénients :

- la taille du codage n'est pas optimale.

3.5 Code ASCII (American Standard Code for Information Interchange)

Le code ASCII permet de coder sur 8 bits les 256 caractères classiques du clavier :

- l'alphabet majuscule et minuscule,
- les chiffres,
- les lettres accentuées ou spéciales des langues européennes,
- la ponctuation.

Le mail est transféré par code ASCII.