Systèmes logiques combinatoires

Objectifs du cours : Après avoir étudié ce cours, vous devez être capable de :
- modéliser un système logique combinatoire,
- simplifier analytiquement et graphiquement les expressions logiques,
- concevoir un système logique.

1 Introduction aux systèmes logiques combinatoires

Un système *logique* est un système dont les entrées et les sorties sont de type *vrai* ou *faux*, 0 ou 1, ou encore *tout* ou *rien*.

Il s'oppose aux systèmes *analogiques* (grandeurs d'entrées/sorties variables continuement) et aux systèmes *numériques* (variables décrites par des entiers). Remarquons que les systèmes numériques peuvent être réalisés par des systèmes logiques (un nombre pouvant être codé en binaire).

Exemple :
- Portail de métro : le ticket est valide ou non valide, le portail est ouvert ou fermé, le voyant est allumé ou éteint,
- Télévision : allumée ou éteinte,
- Ordinateur, CDrom : l'information est codées sous forme de 0 et de 1, 0V ou 5V dans les cablages.

Un système logique *combinatoire* est un système dont l'état des sorties à l'instant t ne dépend que de l'état des entrées au même instant t (figure 1). L'histoire de l'évolution des entrées et l'état du système n'interviennent pas. La sortie est une combinaison des entrées.

FIG. 1 – représentation d'un système combinatoire.

Une *variable logique* $a(t)$ est une variable dont la valeur vaut 0 ou 1 (vrai ou faux) au cours du temps.

2 Algèbre de Boole

Soit l'ensemble $\mathcal{B}$ de deux éléments : $\mathcal{B} = \{0, 1\}$. 0 est l'élément nul et 1 est l'élément unité.

Cet ensemble présente une structure d'algèbre avec les lois suivantes :
- Loi unaire : fonction NON (ou complément) :

$$\begin{aligned} &\mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \\ &a \longrightarrow NON(a) = \bar{a} \end{aligned}$$

a	$\bar{a}$
0	1
1	0

- Loi binaire : fonction OU (ou somme) :

$$\begin{array}{l} \mathcal{B} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \\ (a,b) \longrightarrow a\ OU\ b = a+b \end{array}$$

a	b	$a+b$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

– Loi binaire : fonction ET (ou produit) :

$$\begin{array}{l} \mathcal{B} \times \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B} \\ (a,b) \longrightarrow a\ ET\ b = a.b \end{array}$$

a	b	$a.b$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

– Relation d'équivalence : = (égale).

Propriété de l'algèbre de Boole :

– commutativité pour + et . : $a+b=b+a$ et $a.b$=$b.a$,
– associativité : $a+(b+c)=(a+b)+c$ et $a.(b.c)=(a.b).c$,
– distributivité par rapport à + et . : $a.(b+c)=a.b+a.c$ et $a+(b.c)=(a+b).(a+c)$,
– éléments neutres : 0 est l'élément neutre de + ($a+0=a$) et 1 est l'élément neutre de . ($a.1=a$),
– compléments : $a+\bar{a}=1$ et $a.\bar{a}=0$,
– théorèmes de De Morgan : $\overline{a+b}=\bar{a}.\bar{b}$ et $\overline{a.b}=\bar{a}+\bar{b}$,
– identités remarquables : $a+\bar{a}.b=a+b$ et $a+a.b=a$.

3 Manipulation des fonctions logiques

3.1 Simplification algébrique des fonctions logiques

Les sorties d'un système logique combinatoire sont des fonctions booléennes des entrées (figure 2) :

$$\left| \begin{array}{l} S_1(a,b,c) \\ S_2(a,b,c) \end{array} \right.$$

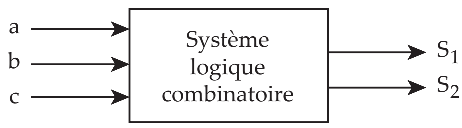


FIG. 2 – Système combinatoire.

Ces fonctions sont en générale décrites en français sous forme de "comportement attendu du système". On peut alors en déduire une *table de vérité* pour chaque fonction :

a	b	c	S_1	S_2
0	0	0	1	0
0	0	1	1	1
0	1	0	0	0
0	1	1	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	1	1
1	1	0	1	1
1	1	1	0	1

L'expression analytique se déduit alors : $S_1(a,b,c) = \bar{a}.\bar{b}.\bar{c} + \bar{a}.\bar{b}.c + a.\bar{b}.\bar{c} + a.b.\bar{c} + a.\bar{b}.c$.

La simplification algébrique vise à simplifier l'expression en utilisant les propriétés de l'algèbre de Boole :

$$\begin{aligned} S_1(a,b,c) &= \bar{a}.\bar{b}.(\bar{c}+c) + a.\bar{b}.(\bar{c}+c) + a.b.\bar{c} \\ &= \bar{a}.\bar{b} + a.\bar{b} + a.b.\bar{c} \\ &= \bar{b} + a.b.\bar{c} \\ &= \bar{b} + a.c \end{aligned}$$

Pour une fonction dépendant de beaucoup de variables, la simplification algébrique peut devenir difficile.

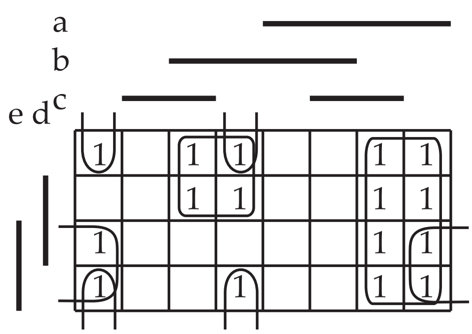
3.2 Simplification graphique : tableaux de Karnaugh

Le tableau de Karnaugh est une présentation particulière de la table de vérité permettant de simplifier graphiquement son expression analytique.

Exemple :

a	b	c	d	e	S
0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	1	1
0	0	0	1	0	
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	0	
0	0	1	0	1	
0	0	1	1	0	
0	0	1	1	1	
0	1	0	0	0	1
0	1	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	
0	1	1	0	0	1
0	1	1	0	1	
0	1	1	1	0	1
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1
1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	
1	1	0	0	1	
1	1	0	1	0	
1	1	0	1	1	
1	1	1	0	0	
1	1	1	0	1	
1	1	1	1	0	
1	1	1	1	1	

Le tableau de Karnaugh répartit les entrées en lignes et colonnes, de manière à n'obtenir qu'un seul changement d'une entrée au passage d'une case à une autre mitoyenne (code réfléchi).



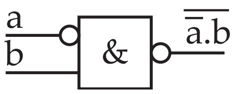
Les groupes de cases les plus grands possible correspondent à des termes simple de l'expression. On trouve finalement :

$$S = \bar{a}.b.\bar{e} + a.\bar{b} + \bar{b}.\bar{c}.e + \bar{a}.\bar{c}.\bar{d}$$

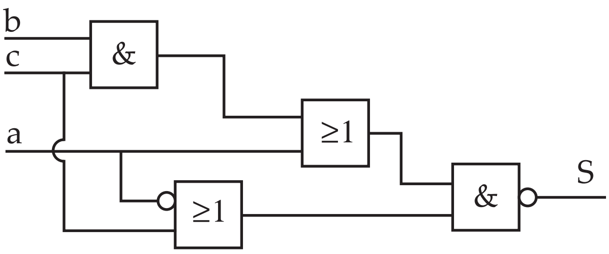
4 Réalisation de fonctions logiques

4.1 Logigrammes

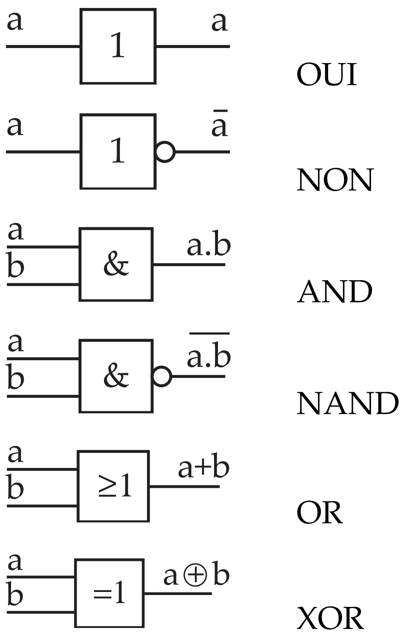
La construction d'un logigramme est une première étape vers la réalisation de fonctions logique sous forme électronique, pneumatique ou hydraulique.
Les fonctions élémentaires sont représentées par des cellules et l'information d'entrée (à gauche) est travaillée pour fournir la sortie (à droite). Le temps de propagation de l'information dans les portes est supposé infiniment court.
Le symbole $\circ$ designe la complémentation :



Exemple : logigramme de la fonction $S = (a + b.c).(c + \bar{a})$.



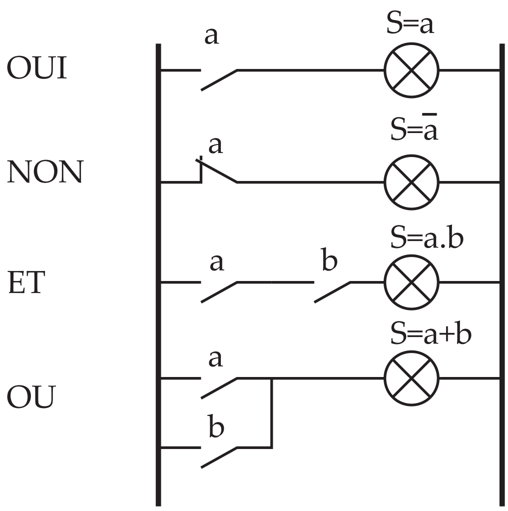
Cellules élémentaires :



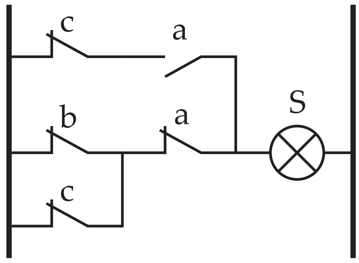
4.2 Schéma à contacts

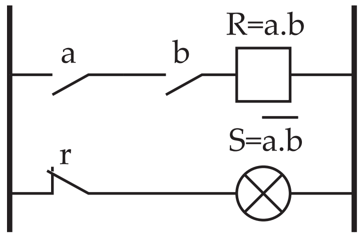
Les schémas à contact sont une première étape vers la réalisation électrique de fonctions logiques.
Les entrées sont représentées par des interrupteurs et les sorties par des ampoules, sur un cablage entre une ligne à gauche représentant une source de tension et une ligne à droite représentant la masse. Les opérations ET et OU sont réalisées par la mise en série ou parallèle des interrupteurs.

Fonctions élémentaires :



Exemple : Construisons le cablage de la fonction $S = (a + b.c).(c + \bar{a}) = (\bar{a}.(\bar{b} + \bar{c})) + (\bar{c}.a)$.





Un *relais* est, dans un schéma à contact, une sortie complémentaire utlisée comme nouvelle entrée. Dans l'exemple ci-dessus, $S = \overline{a.b}$.

4.3 Réorganisation de fonctions : fonction universelle

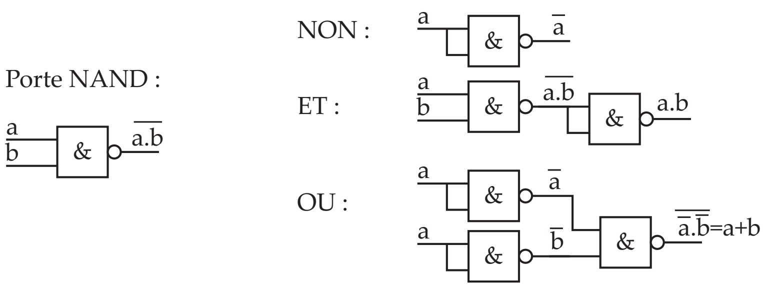
Une fonction est dite *universelle* si elle permet de réaliser les fonctions ET, OU, et NON. Il est alors possible de réaliser toutes les fonctions logiques à l'aide de cette seule fonction.

Exemple – fonction NAND (NON ET) :

$$a \text{ NAND } b = \overline{a.b}$$

Cette fonction permet de réaliser les fonctions ET, OU ET NON :
- NON$(a) = \bar{a} = \overline{a.a}$,
- a ET $b = a.b = \overline{\overline{a.b}} = \overline{(\overline{a.b}).(\overline{a.b})}$,
- a OU $b = a+b = \overline{\overline{a+b}} = \overline{\bar{a}.\bar{b}} = \overline{(\overline{a.a}).(\overline{b.b})}$.

Logigrammes des fonctions NON, ET et OU réalisées avec la porte NAND :



5 Méthodologie de conception d'un système logique combinatoire

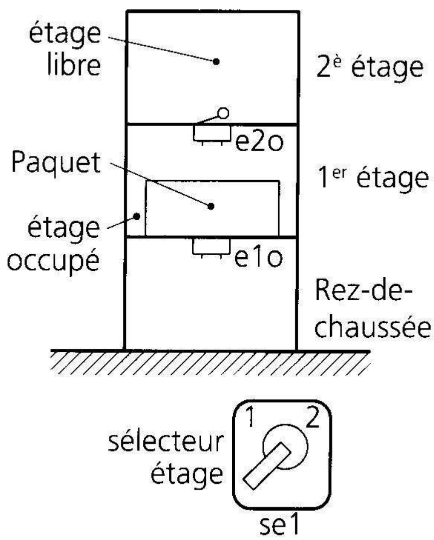
Nous allons illustrer la démarche de conception sur un exemple, un système de rangement[1], dont le cahier des charges est donné ci-dessous.

Système de rangement : Cahier des charges

Soit un système de rangement de paquets comprenant deux étages. Les paquets arrivent au rez-de-chaussée. Un mécanisme non représenté et hors étude permet de placer les paquets arrivant au rez-de-chaussée soit au premier étage, soit au deuxième étage. L'occupation de chaque étage est détectée par un capteur "étage occupé" (e_1o et e_2o).

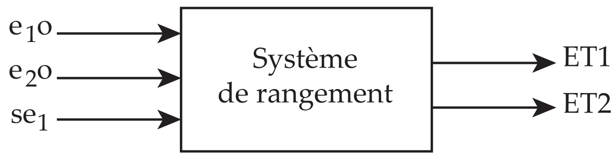
Un sélecteur permet de définir un premier niveau de priorité entre les deux étages, la modélisation de ce sélecteur corresondant à un information : sélection de l'étage 1 se_1, la sélection de l'étage 2 correspond à $\overline{se_1}$.

La fonction logique recherchée doit élaborer l'information : étage choisi à tout moment, c'est-à-dire quel que soit la configuration du système (nombre d'étages occupés et position du sélecteur).



[1]Exemple provenant du livre Sciences Industrielles, G. Colombari, J. Giraud.

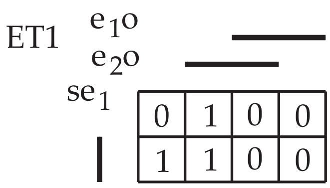
1. **Réaliser le bilan des entrées – sorties du système**

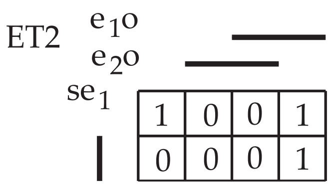


2. **Vérifier que le système est bien combinatoire**
   Les sorties à l'instant t dépendent-elles uniquement des entrées à l'instant t ?
3. **Écrire la table de vérité (ou le tableau de Karnaugh) pour chaque sortie**
   Table de vérité :

e_1o	e_2o	se_1	$ET1$	$ET2$
0	0	0	0	1
0	0	1	1	0
0	1	0	1	0
0	1	1	1	0
1	0	0	0	1
1	0	1	0	1
1	1	0	0	0
1	1	1	0	0

   Tableaux de Karnaugh :

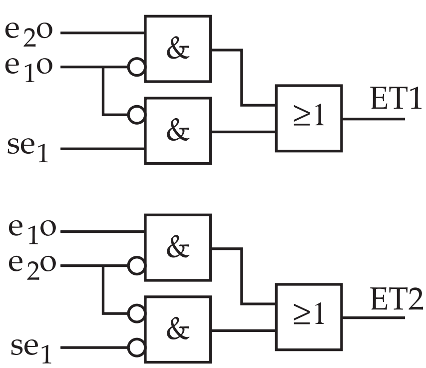


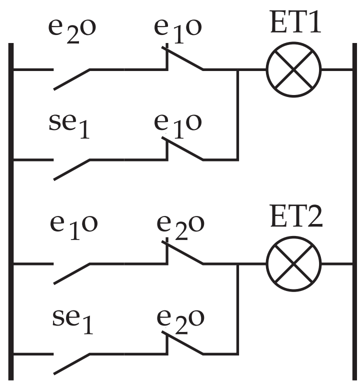


4. **Déterminer les fonctions logiques pour chaque sortie**
   Les tableaux de Karnaugh permettent d'écrire les fonctions logiques simplifiées :

$$\begin{cases} ET1 = e_2o.\overline{e_1o} + se_1.\overline{e_1o} \\ ET2 = e_1o.\overline{e_2o} + \overline{se_1}.\overline{e_2o} \end{cases}$$

5. **Construire les schémas de réalisation sous forme de logigramme ou de schéma à contacts**





6. **Vérifier le bon respect du cahier des charges sur le cablage obtenu**