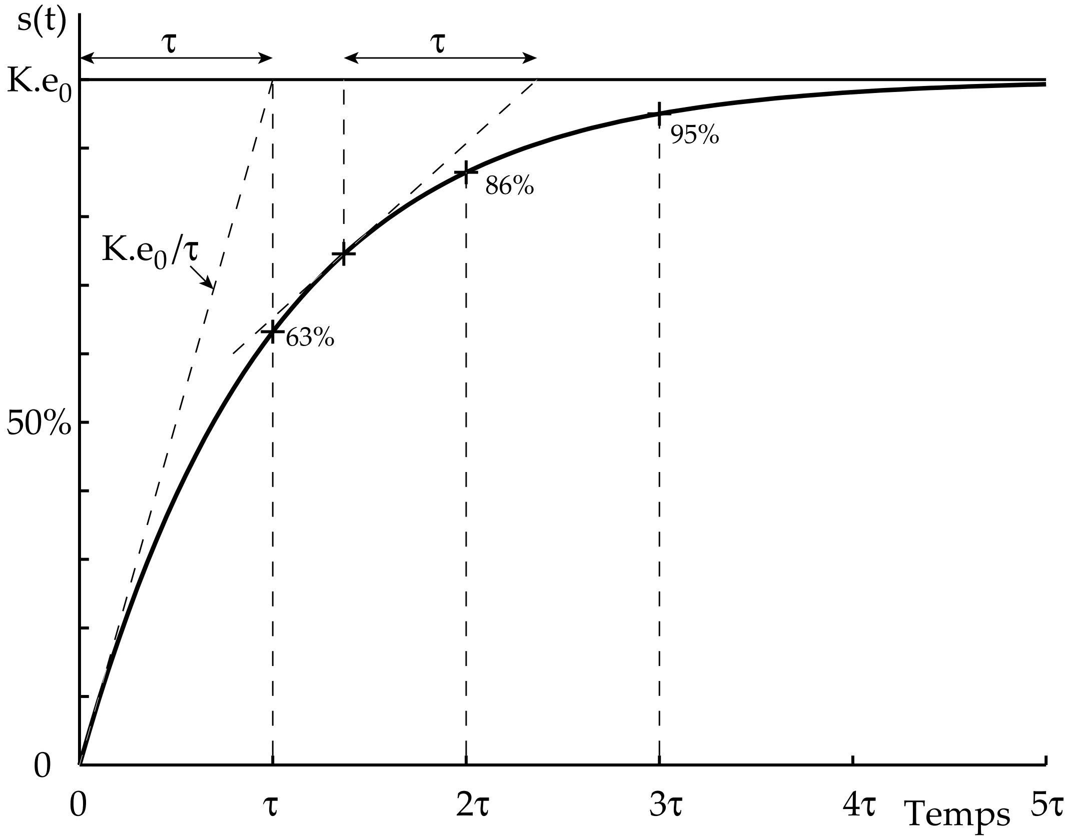
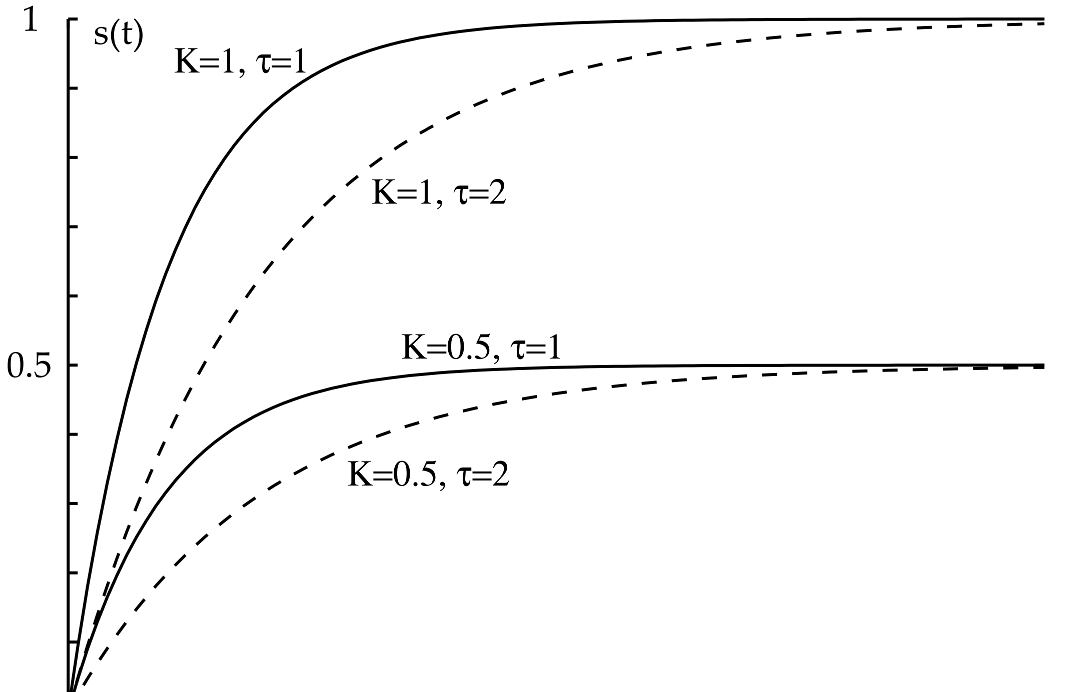
Premier ordre

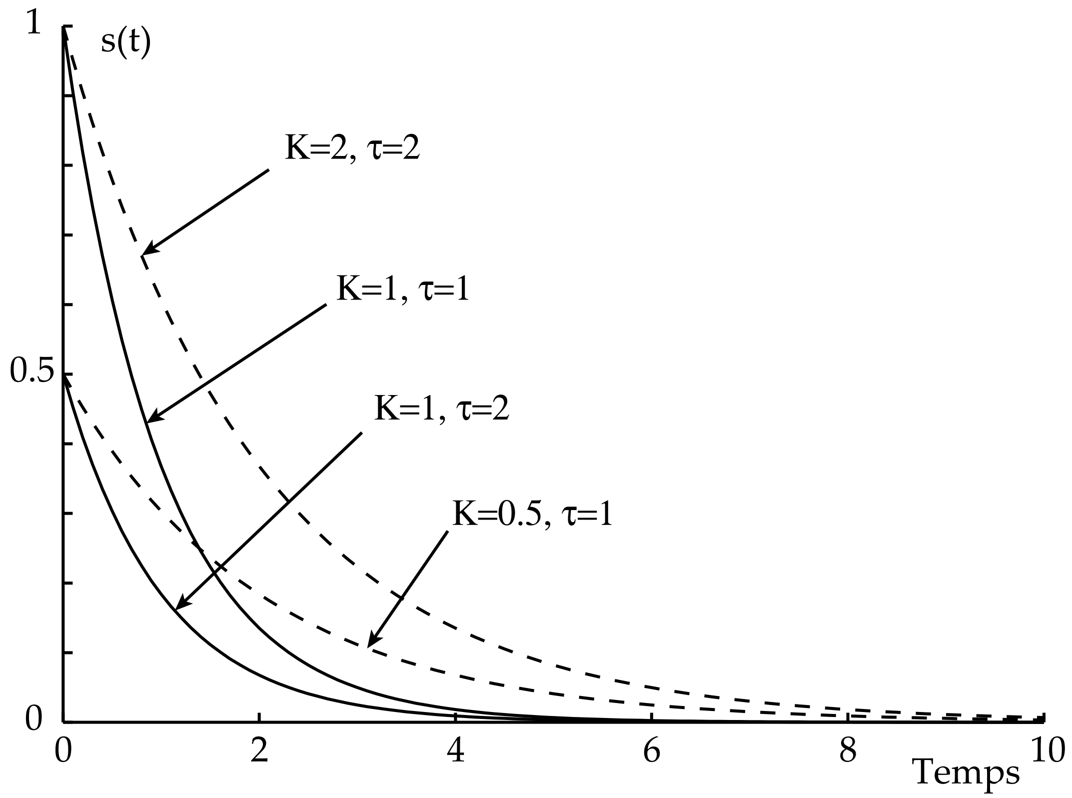
Expression de la fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{K}{1+\tau.p}$.



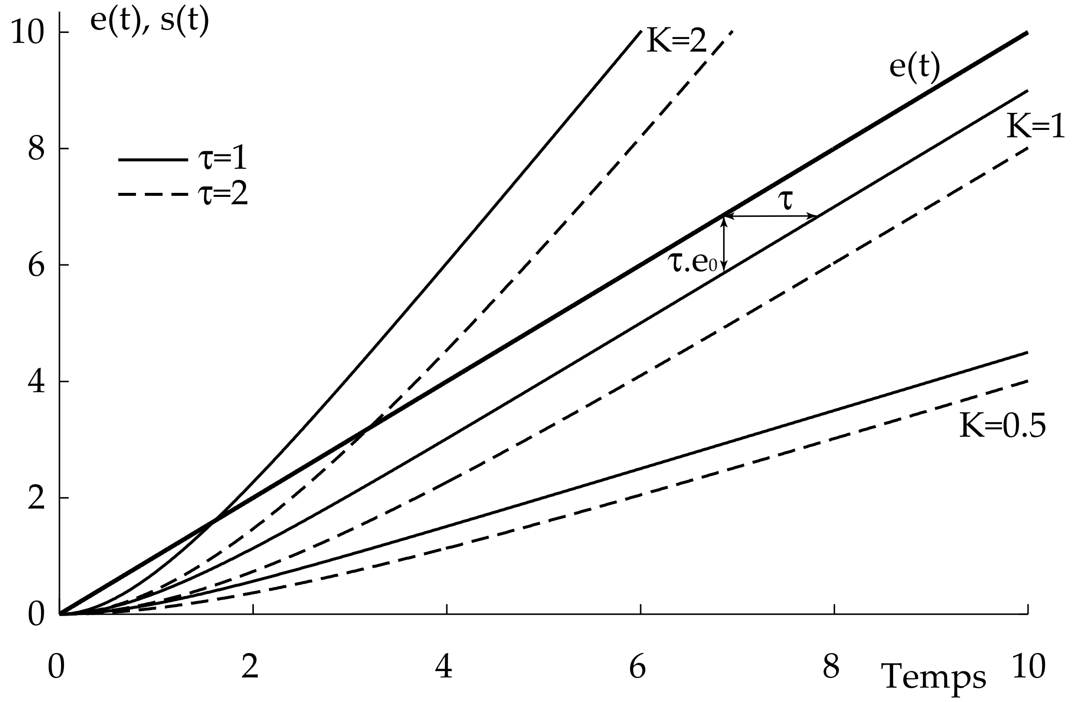
Caractéristiques remarquables de la réponse à un échelon $e(t) = e_0.U(t)$. La valeur à convergence permet d'identifier K tandis que le temps à 63%, 86% et 95% ou encore le point d'intersection entre l'asymptote et la tangente à l'origine permettent d'identifier τ.



Réponse indicielle : Réponse d'un système du premier ordre à un échelon unitaire pour différentes valeurs de K et τ.



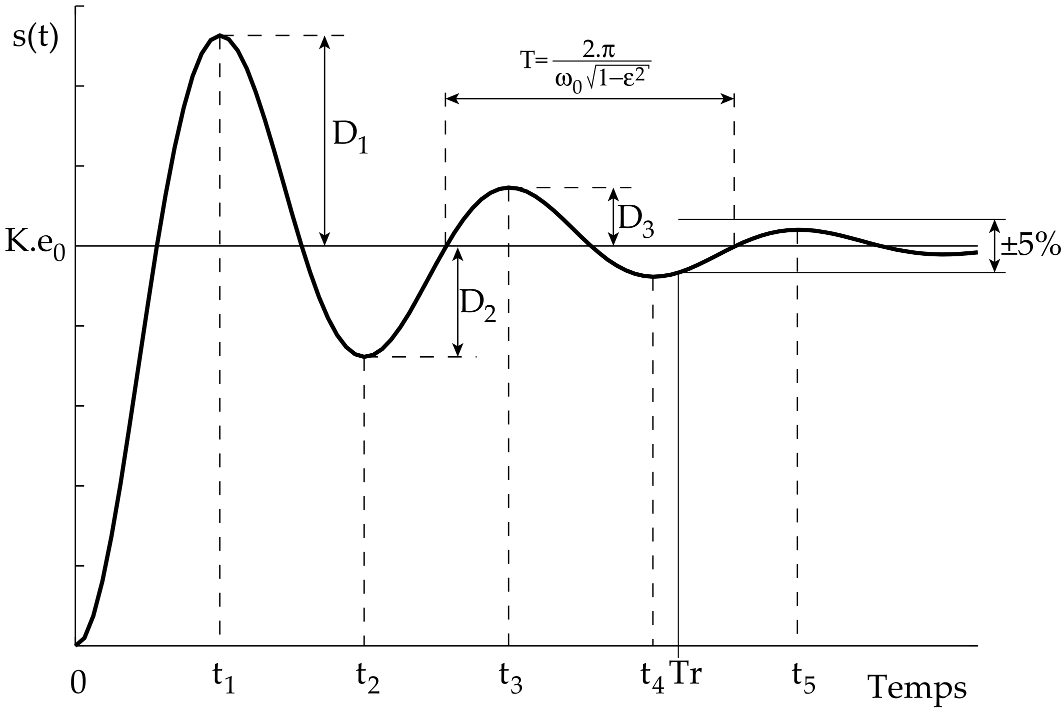
Réponse impulsionnelle : Réponse d'un système du premier ordre à un dirac unitaire pour différentes valeurs de K et τ.



Réponse à une rampe : Réponse d'un système du premier ordre à une rampe unitaire pour différentes valeurs de K et τ. On définit lorsque $K = 1$ une erreur de trainage ou erreur de poursuite ou encore erreur dynamique entre l'entrée et la sortie, d'autant plus importante que τ est grand.

Second ordre

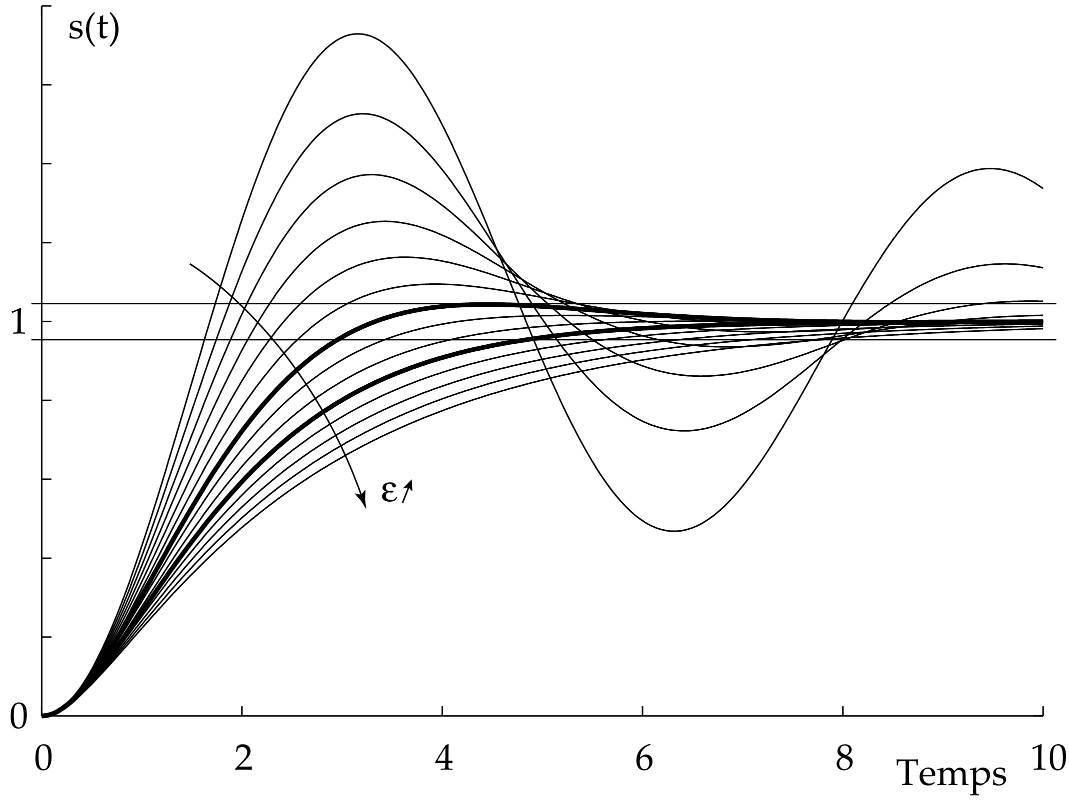
Expression de la fonction de transfert : $H(p) = \dfrac{K}{1 + 2.\varepsilon.\frac{p}{\omega_0} + \frac{p^2}{\omega_0^2}}$.



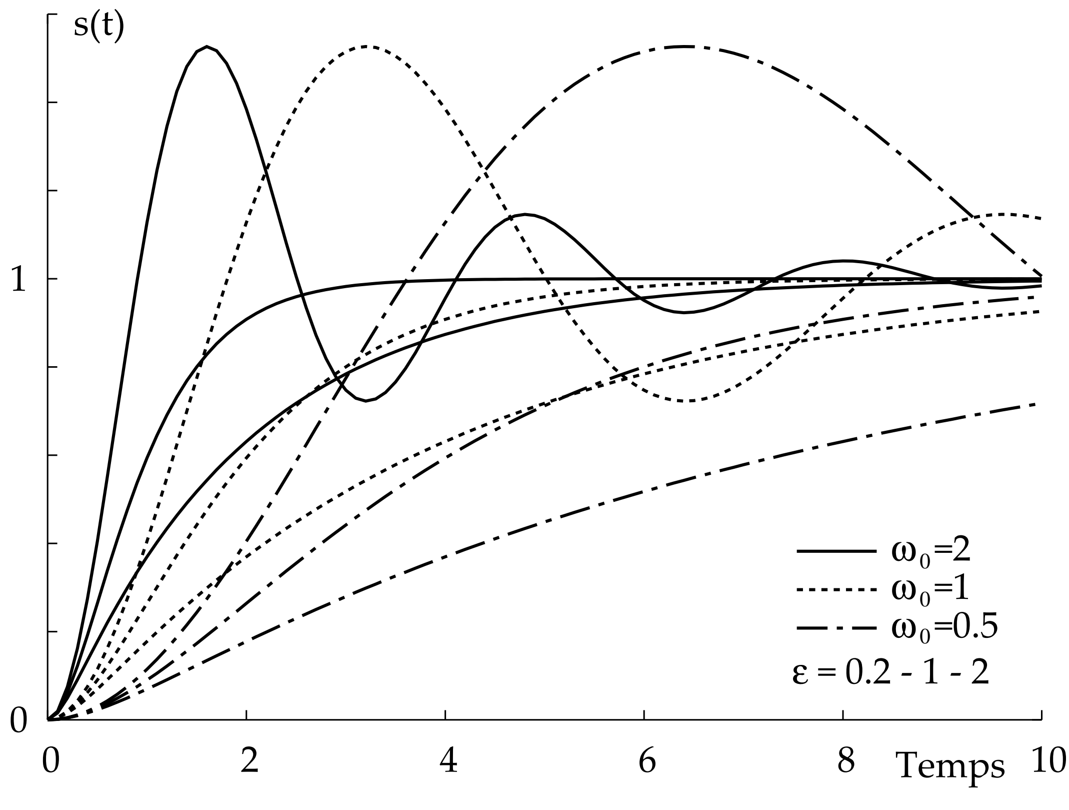
Caractéristiques remarquables de la réponse d'un système du second ordre tel que $\varepsilon < 1$ (oscillations amorties), à un échelon $e(t) = e_0.U(t)$. La tangente à l'origine est horizontale. La valeur à convergence permet d'identifier le gain statique K. Le pourcentage de dépassement D_1 permet d'identifier la valeur de l'amortissement ε tandis que le temps du dépassement t_1 permet d'identifier la pulsation non amortie ω_0. D_1 est le rapport de la hauteur de dépassement sur la valeur à convergence $K.e_0$.

En notant t_k le temps du $k^{\text{ème}}$ dépassement et D_k le dépassement (en pourcentage de la valeur à convergence) du $k^{\text{ème}}$ dépassement, les relations suivantes permettent d'identifier les paramètres d'un système du second ordre à l'aide de la courbe de réponse à un échelon.

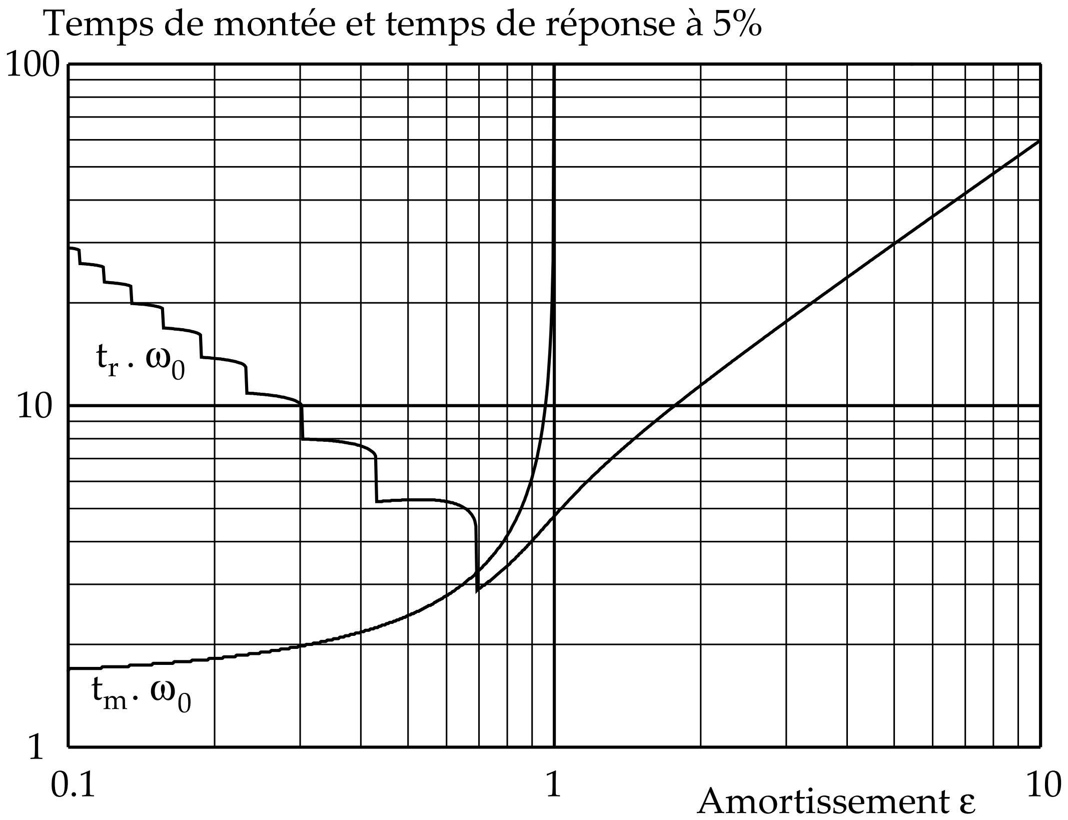
Instant du dépassement k	$t_k = \dfrac{k.\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\varepsilon^2}}$
Dépassement k (pourcentage)	$D_k = exp\dfrac{-k.\pi.\varepsilon}{\sqrt{1-\varepsilon^2}}$
Amortissement (en fonction de D_k)	$\varepsilon = \left(1 + \dfrac{k^2.\pi^2}{\ln^2 D_k}\right)^{\frac{-1}{2}}$
Pulsation non amortie (en fonction de t_k)	$\omega_0 = \dfrac{k.\pi}{t_k.\sqrt{1-\varepsilon^2}}$
Pseudo-pulsation	$\omega_p = \omega_0.\sqrt{1-\varepsilon^2}$
Pseudo-période	$T = \dfrac{2.\pi}{\omega_p} = \dfrac{2.\pi}{\omega_0.\sqrt{1-\varepsilon^2}}$
Temps de réponse à $x\%$ pour $\varepsilon \ll 1$	$t_{r\ x\%} \simeq \dfrac{1}{\varepsilon.\omega_0}.\log\left(\dfrac{100}{x}\right)$



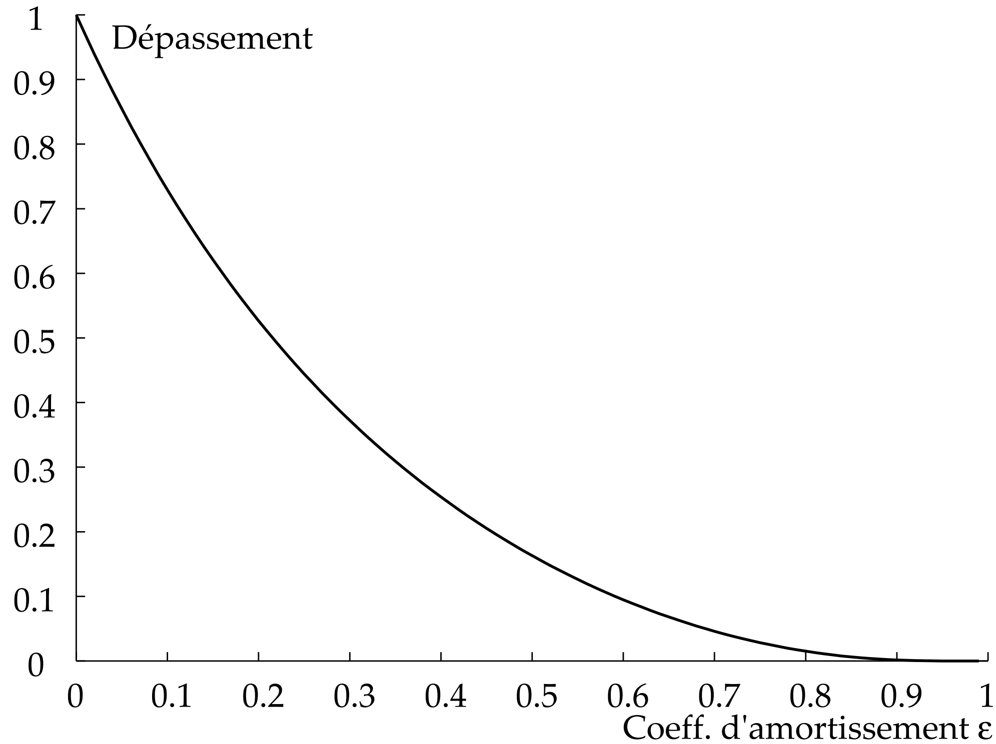
Réponse indicielle : Réponse d'un système du second ordre à un échelon unitaire pour $K = 1, \omega_0 = 1$ et différentes valeurs de ε (de 1.5 à 0.1 par pas de 0.1). Les courbes surlignées représentent les situations critique ($\varepsilon = 1$) et oscillante à temps de réponse à 5% minimal ($\varepsilon \simeq 0.7$).



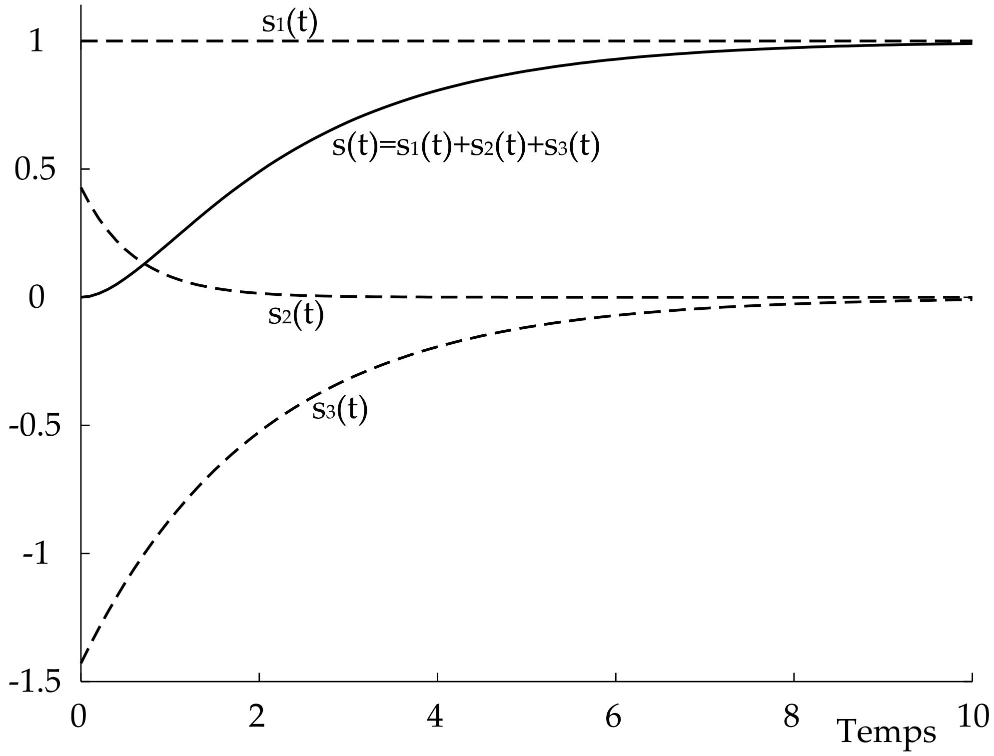
Réponse d'un système du second ordre à un échelon unitaire pour $K = 1$ et différentes valeurs de ω_0 dans les trois cas remarquables : non oscillant ($\varepsilon = 2$), amortissement critique ($\varepsilon = 1$) et oscillant amorti ($\varepsilon = 0.5$). On remarque que la hauteur du premier dépassement ne dépend pas de la pulsation non amortie ω_0.



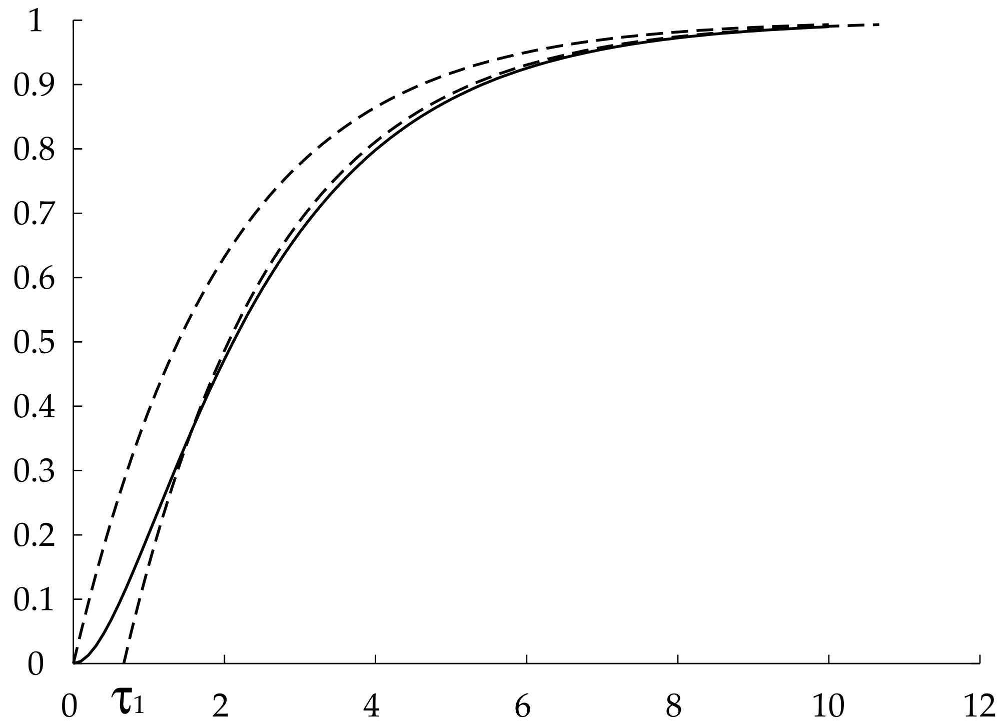
Temps de réponse à 5% (réponse indicielle) en fonction de l'amortissement ε (La valeur lue sur la courbe est à diviser par ω_0 pour obtenir le temps de réponse). Le minimum est atteint pour $\varepsilon \simeq 0.7$. Au delà de $\varepsilon = 1$, la courbe est régulière car il n'y a plus de dépassement. Les bosses de la partie gauche de la courbe sont dus aux sauts d'un extremum à un autre du temps de réponse. Cette partie de courbe "grossièrement rectiligne" pour $\varepsilon \ll 1$ est à relier à la dernière formule du tableau précédent. Le temps de montée correspond au temps de la première intersection de la réponse avec l'asymptote. Cette valeur devient infinie pour $\varepsilon \geq 1$ puisqu'il n'y a plus de dépassement.



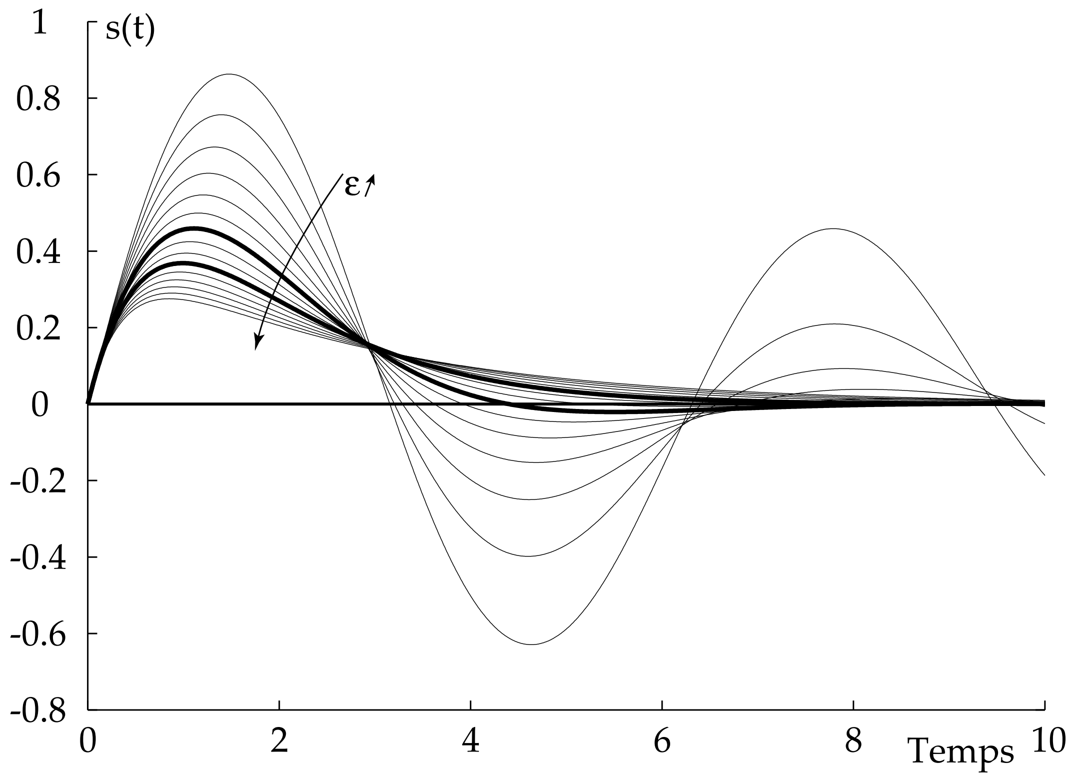
Valeur du premier dépassement D_1 en fonction de l'amortissement ε. Pour les cas limites $\varepsilon = 0$ et $\varepsilon = 1$, les réponses sont non-amorties et non-oscillantes.



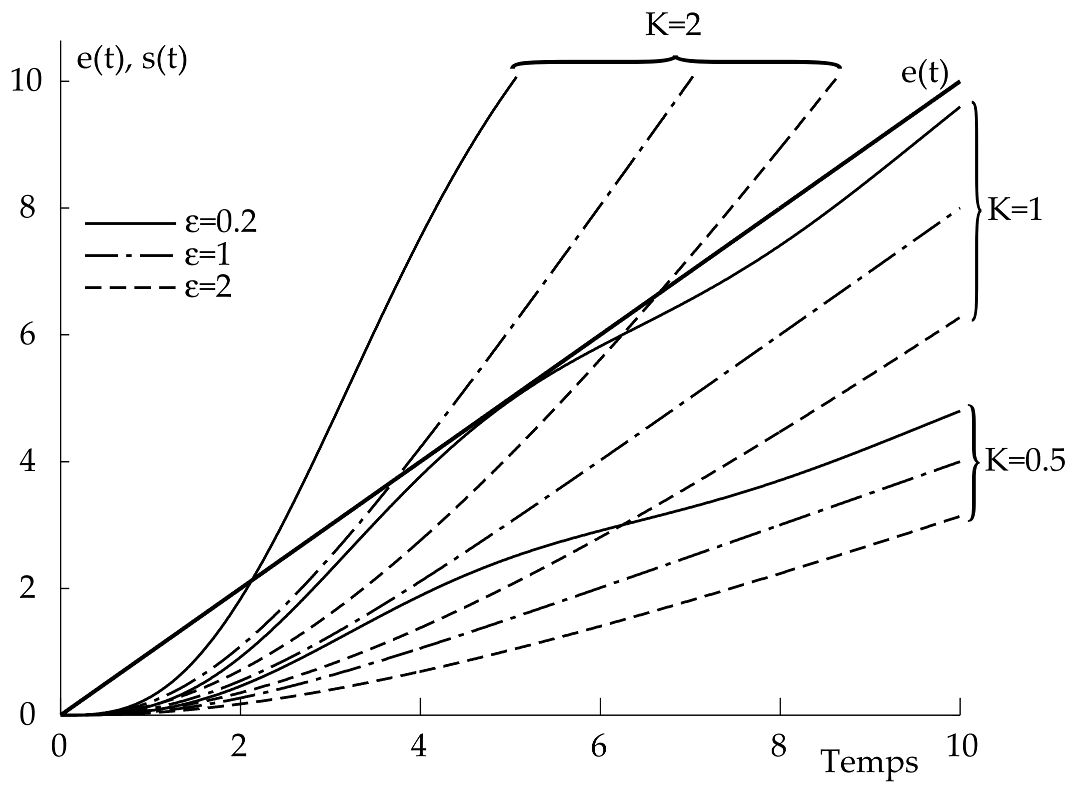
La réponse indicielle d'un système du second ordre en régime amorti ($\varepsilon > 1$ donc deux pôles réels) est la somme d'un échelon (représentant la réponse permanente) et de deux exponentielles amorties de constantes de temps différentes (représentant la partie transitoire de la réponse). Les pentes à l'origine sont exactement opposées ce qui conduit à une tangente horizontale pour la somme.



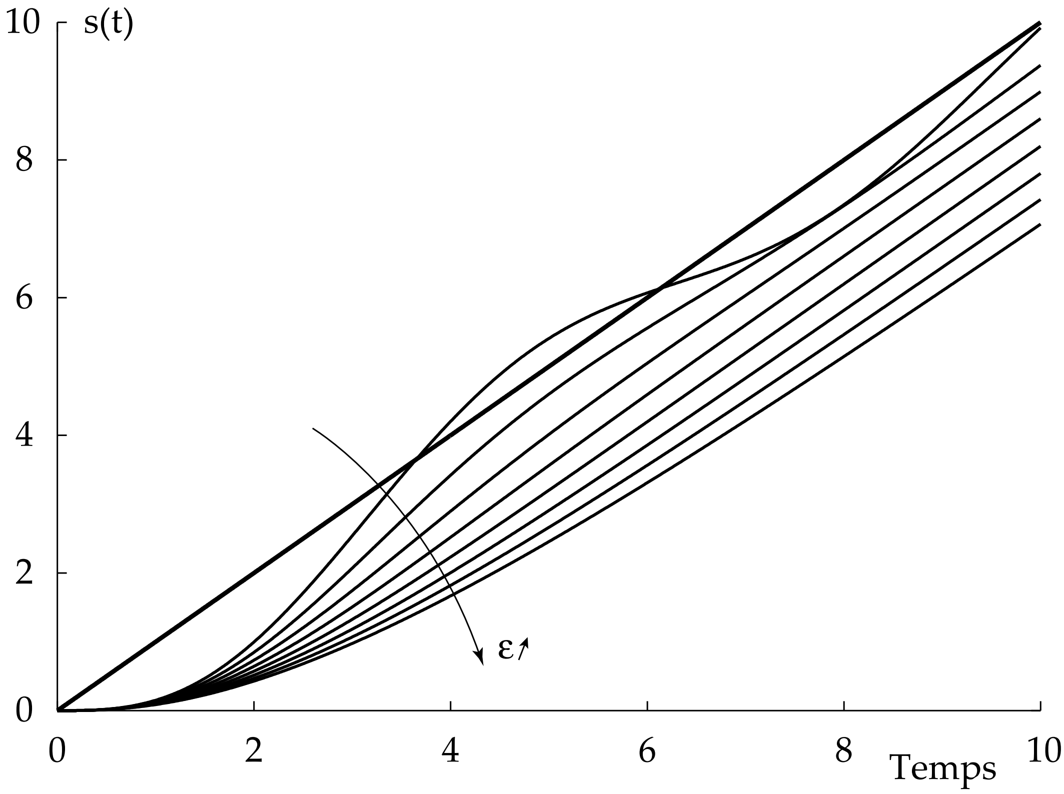
Lorsque un système du second ordre en régime amorti présente deux pôles réels p_1 et p_2 très différents ($|p_2| \ll |p_1|$), le pôle p_2 de norme la plus petite (dont la constante de temps τ_2 est la plus grande) est dit *dominant*. Le système peut être assimilé à un premier ordre, éventuellement retardé de la valeur de la constante de temps τ_1. La figure montre un tel second ordre pour lequel $p_1 = 3.p_2$.



Réponse impulsionnelle : Réponse d'un système du second ordre à un dirac unitaire pour $K = 1$, $\omega_0 = 1$ et différentes valeurs de ε (de 1.5 à 0.1 par pas de 0.1). Les courbes surlignées représentent les situations critique ($\varepsilon = 1$) et oscillante à temps de réponse indicielle à 5% minimal ($\varepsilon \simeq 0.7$).



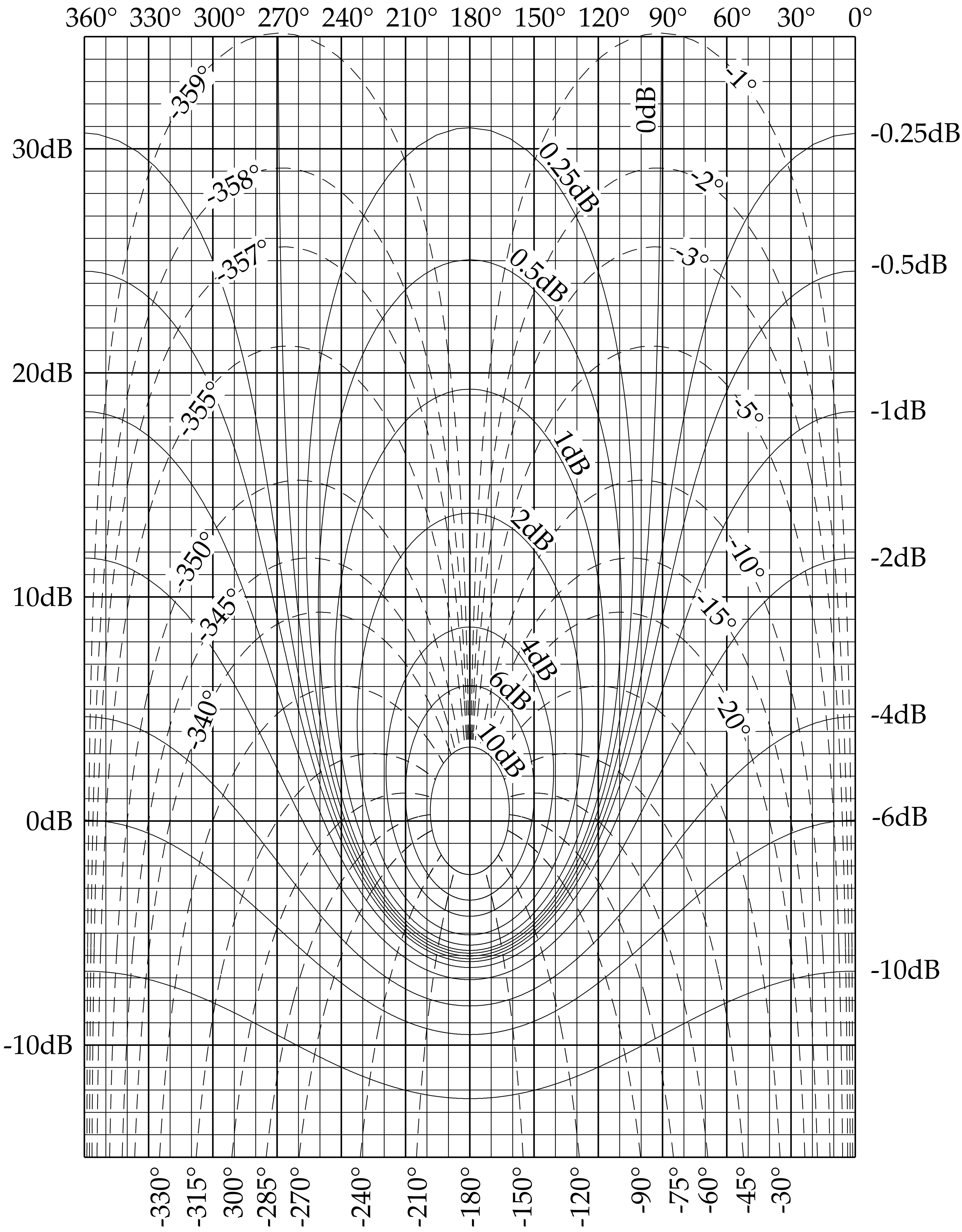
Réponse à une rampe : Réponse d'un système du second ordre à une rampe unitaire pour différentes valeurs de K et les trois cas types : amortissement ($\varepsilon > 1$), amortissement critique ($\varepsilon = 1$) et oscillations amorties ($\varepsilon < 1$). On définit lorsque $K = 1$ une erreur de trainage ou erreur de poursuite ou encore erreur dynamique entre l'entrée et la sortie, d'autant plus importante que ε est grand.



Réponse d'un système du second ordre à une rampe unitaire pour $K = 1$, $\omega_0 = 1$ et différentes valeurs de ε (de 1.5 à 0.1 par pas de 0.2). L'erreur de poursuite augmente avec l'amortissement ε.

Quelques questions pour approfondir l'étude des courbes :

- *Quelle relation doit-il exister entre K et τ pour ne pas modifier la valeur à convergence d'un système du premier ordre soumis à une entrée en échelon ?*
- *Comment fait-on la différence entre la réponse d'un premier ordre et la réponse d'un second ordre amorti pour une entrée en échelon ?*
- *Déterminer la valeur de l'amortissement puis la valeur de la pulsation propre, utilisées pour tracer la courbe de réponse du second ordre indiquant toutes les caractéristiques (au dessus du tableau). On supposera pour cela que $t_1 = 1\,s$, $t_2 = 2\,s$ et $t_i = i\,s$. Vérifier l'ordre de grandeur du résultat à l'aide de la courbe indiquant le temps de réponse pour ε et à l'aide de la pseudo-période pour ω_0.*
- *La valeur du dépassement dépend-elle de la pulsation propre ? Du gain statique ? De l'amortissement relatif ?*
- *Pourquoi la courbe du temps de montée n'est plus indiquée pour $\varepsilon > 1$?*
- *Dans le cas d'un second ordre amorti, dont un des pôles est très supérieur à l'autre, proposer une méthode pour trouver une estimation des constantes de temps à partir de la courbe.*
- *Pourquoi ne peut-on pas définir d'erreur de trainage dans le cas d'une entrée en rampe pour un système dont le gain statique ne vaut pas 1 ?*
- *La réponse à une rampe d'un second ordre fortement amorti (ε grand) ressemble beaucoup à celle d'un premier ordre. Expliquez cette observation.*
- *La dernière formule du tableau donne une estimation du temps de réponse à 5% d'un second ordre. Tracer la courbe correspondant à cette estimation sur la figure donnant le temps de réponse en fonction de ε.*



Abaque de Black réalisant la transformation :

$$z \rightarrow \frac{z}{1+z}$$

Abcisses (°) :	$\arg(z)$
Ordonnées (dB) :	$\lvert z \rvert$
Courbes pointillées (°) :	$\arg\left(\dfrac{z}{1+z}\right)$
Courbes continues (dB) :	$\left\lvert \dfrac{z}{1+z} \right\rvert$