## TD6 : Dynamique

### 1 Ligne de production de chocolats $^1$

On s'intéresse à une ligne de production industrielle de sujet creux en chocolat (petits et grands sujets, par exemple des pères Noël, lapins, œufs, etc).

- Cette ligne de production doit remplir les trois principales fonctions suivantes :
- « Doser le chocolat » pour avoir la bonne quantité de chocolat dans les empreintes des moules.
- « Transférer les moules » dans les cadres mobiles pour assurer un fonctionnement en continu.
- « Centrifuger le chocolat » à l'intérieur des empreintes des moules afin d'obtenir des sujets creux d'épaisseur constante.

Seule la fonction « Centrifuger le chocolat » sera étudiée dans cet exercice.



FIGURE 1 – Chaîne de centrifugation.

### Présentation de la centrifugeuse

La centrifugeuse a pour fonction principale de centrifuger le chocolat à l'intérieur des empreintes des moules afin d'obtenir des sujets creux à paroi d'épaisseur la plus constante possible. La centrifugeuse doit satisfaire au cahier des charges tableau 1.

Dans la centrifugeuse, cent cadres mobiles sont disposés régulièrement les uns derrière les autres. Un cadre mobile est constitué de deux parties : un cadre extérieur C.E. et un cadre intérieur C.I. dans lequel est inséré le moule rempli de chocolat (voir figure 3 et photos 1 et 2).

### Entraînement du cadre extérieur C.E.

Le bâti 0 n'est pas représenté sur la figure 3 qui ne fait apparaître qu'un seul cadre mobile. La chaîne de transport se déplace en translation suivant  $\vec{x}$  par rapport au bâti 0 à une vitesse  $V.\vec{x}$ 

<sup>1.</sup> Extrait du concours Centrale 2001



FIGURE 2 – Cadres mobiles seuls avant utilisation.

Fonction de service	Critère	Niveau
	Nombre de rotation	2
FS1 : Répartir le chocolat	Vitesse de rotation $N_{C.E./bati}$	$\pm 1.5 \ tr/min$
dans le moule	Vitesse de rotation $N_{C.I./C.E.}$	$\pm 5 \ tr/min$
	Régularité des vitesses de rotation	$\pm 5\%$
FS2 : S'adapter aux	Vitesse de la chaîne de transport	222 mm/s
chaînes d'entrainement	Vitesse maximale des chaînes	$267 \ mm/s$

TABLE 1 – Extrait du CdCF.

et entraîne dans son mouvement le cadre mobile. La chaîne d'entraînement du cadre extérieur C.E. se déplace en translation suivant  $\vec{x}$  à la vitesse  $V_1 \cdot \vec{x}$  par rapport au bâti 0, et entraîne en rotation la roue 1 autour de l'axe  $(A, \vec{z})$  par rapport au bras  $B_1$ , donc par rapport au bâti 0. Or, le cadre extérieur C.E. et la roue 1 sont en liaison encastrement, donc le cadre extérieur C.E. a un mouvement par rapport au bâti 0 caractérisé par le torseur cinématique :

$$\left\{ \mathcal{V}C.E./B\hat{a}ti \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \vec{\Omega}_{C.E./bati} = \omega_{C.E./bati}.\vec{z} \\ \vec{V}_{G\in C.E./bati} = V.\vec{x} \end{array} \right\} \text{ avec } G = (A, \vec{z}) \cap (D, \vec{y}_4)$$

### Entraînement du cadre intérieur C.I.

La chaîne d'entraînement du cadre intérieur C.I. se déplace en translation suivant  $\vec{x}$  à la vitesse  $V_2.\vec{x}$  par rapport au bâti 0, et entraîne la roue 2 en rotation autour de l'axe  $(B, \vec{z})$  par rapport au bras  $B_2$ , donc par rapport au bâti 0. La roue est en liaison pivot avec le cadre extérieur C.E. et en liaison encastrement avec la poulie 3. Celle-ci entraîne en rotation autour de l'axe  $(C, \vec{y}_4)$ , grâce à la courroie, la poulie 4 qui est en liaison pivot avec le cadre extérieur C.E.. Le cadre intérieur C.I. et la poulie 4 sont en liaison encastrement, donc le cadre intérieur C.I. a aussi un mouvement de rotation autour de l'axe  $(C, \vec{y}_4)$  par rapport au cadre extérieur C.E.. Ainsi, le cadre intérieur C.I., avec son moule rempli de chocolat, a un mouvement par rapport au bâti 0 caractérisé par le torseur cinématique :

$$\left\{ \mathcal{V}\text{C.I./Bâti} \right\} = \begin{cases} \vec{\Omega}_{C.I./bati} = \omega_{C.I./C.E.} \cdot \vec{y}_4 + \omega_{C.E./bati} \cdot \vec{z} \\ \vec{V}_{G \in C.I./bati} = V \cdot \vec{x} \end{cases} \text{ avec } G = (A, \vec{z}) \cap (D, \vec{y}_4)$$



Repère  $A(\vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$  lié au cadre extérieur C.E. Repère  $C(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$  lié à la poulie 4 et au cadre intérieur C.I.  $\alpha$  et  $\beta$  les paramètres de position des repères 1 et 4.

FIGURE 3 – Schéma cinématique du mécanisme d'entrainement du moule.

### Caractéristiques cinématiques retenues

Après de nombreux essais pour obtenir une épaisseur constante des sujets en chocolat, des résultats satisfaisants ont été obtenus pour une vitesse de rotation du cadre extérieur C.E. autour de l'axe  $(A, \vec{z})$ ,  $N_{C.E./bati} = \pm 1.5 tr/min$  (soit 1 tour pour 40 secondes), et une vitesse de rotation du cadre intérieur C.I. autour de l'axe  $(C, \vec{y}_4)$ ,  $N_{C.I./C.E.} = \pm 5 tr/min$  (soit 1 tour pour 12 secondes). Pour des raisons non étudiées ici, le constructeur de la centrifugeuse a souhaité limiter les vitesses de déplacement des trois chaînes par rapport au bâti à 16 m/min (266.66 mm/s). La vitesse V de déplacement de la chaîne de transport par rapport au bâti a été prise égale à 222 mm/s.

La figure 3 est représentée dans le cas particulier où  $\vec{y_1} = \vec{y_4} = \vec{y}$  et ne fait pas apparaître les trois moteurs indépendants qui entraînent les trois chaînes. Le repère  $R(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ , avec le point O lié au bâti 0 (non représenté sur la figure 3) et l'axe  $\vec{y}$  vertical ascendant, est supposé galiléen.

Caractéristiques principales				
Roues 1 et 2	Masses négligées			
	Pas primitif : $1 pouce = 25.4 mm$			
	Nombre de dents : $Z_1 = Z_2 = 24$			
Cadre intérieur C.I.	Masse $m_{CI}$			
	Centre d'inertie : $G = (A, \vec{z}) \cap (D, \vec{y}_4)$			
	Matrice associée à l'opérateur d'inertie, exprimé sans la			
	base $(\vec{x}_4, \vec{y}_4, \vec{z}_4)$ : $I_{G,CI} = \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 \\ 0 & 0 & C \end{pmatrix}$			
Dispositif poulies-courroies	Rapport de réduction $=1$			
	Rendement $=1$			
	Masses des poulies et de la courroie négligées			
	Rayon des poulies 3 et $4:r$			

# 1.1 Étude des vitesses d'entraînement et et du sens de rotation de chacune des roues 1 et 2

L'objectif de cette partie est de calculer les vitesses des chaînes d'entraînement qui permettent d'obtenir les bonnes vitesses de rotation  $N_{C.E./bati}$  et  $N_{C.I./C.E.}$ .

- 1. Déterminer le rayon primitif R des roues 1 et 2, en notant que les caractéristiques géométriques de ces roues se déterminent comme une roue dentée d'engrenage à denture droite. Faire l'application numérique.
- 2. En supposant que les contacts poulies-chaînes se font avec roulement sans glissement en I et en J, déterminer littéralement  $V_1$  en fonction de V, R et  $\omega_{C.E./bati}$  puis  $V_2$  en fonction de V, R,  $\omega_{C.E./bati}$  et  $\omega_{C.I./C.E.}$ . Calculer  $V_1$  et  $V_2$  et discuter afin que ces vitesses respectent le cahier des charges.
- 3. Représenter, à main levée, dans les trois cas qui permettent des vitesses inférieures à 16 m/min pour toutes les chaînes, la chaîne d'entraînement du cadre extérieur C.E., la chaîne d'entraînement du cadre intérieur C.I., la roue 1 et la roue 2. Préciser sur ces schémas, au moyen de flèches, le sens de rotation de chacune des roues 1 et 2.

## 1.2 Étude de l'action exercée par la chaîne d'entraînement du cadre intérieur sur la roue 2

L'objectif de cette partie est de justifier la nécessité d'associer une régulation de vitesse au moteur d'entraînement de la chaîne d'entraînement du cadre intérieur C.I.

Le constructeur à choisi la configuration où  $\omega_{C.E./bati} < 0$  et  $\omega_{C.I./C.E.} > 0$ . Les liaisons sont supposées parfaites.

- 1. La détermination du moteur qui permet le déplacement de la chaîne d'entraînement du cadre intérieur C.I. dépend de plusieurs paramètres dont l'action exercée, pour un cadre mobile, par cette chaîne sur la roue 2. Soit  $\vec{S} = S.\vec{x}$  cette action. Isoler successivement les ensembles  $\{2+3\}$  et  $\{CI+4\}$  en faisant apparaître clairement les actions mécaniques qui s'exercent sur ces ensembles. Déterminer S, en précisant la démarche utilisée, et en se plaçant en mouvement permanent  $(V, V_1 \text{ et } V_2 \text{ constantes donc } N_{C.E./bati} \text{ et } N_{C.I./C.E.}$  constantes).
- 2. En déduire l'action S exercée par la poulie 2 sur la chaîne d'entraînement du cadre intérieur C.I. en fonction des paramètres  $\alpha$  et  $\beta$  et de leurs dérivées.
- 3. Justifier alors la nécessité d'associer une régulation de vitesse au moteur d'entraînement de la chaîne d'entraînement du cadre intérieur C.I. pour assurer la régularité imposée au cahier des charges.

### 2 Panneaux du satellite Spot 4<sup>2</sup>



FIGURE 4 – Vue générale de SPOT 4

Le satellite d'observation de la Terre SPOT 4 (Fig. 4), conçu par le CNES, est opérationnel depuis 1998. Il complète la famille SPOT en élargissant sa mission pour permettre de mieux répondre aux besoins des utilisateurs d'images spatiales.

L'énergie nécessaire au fonctionnement du satellite SPOT 4 est délivrée par des capteurs solaires. Après mise sur orbite, lorsque le satellite occupe sa position nominale, les panneaux solaires sont déployés.

A 36 000 km d'altitude, le positionnement angulaire précis du satellite est essentiel pour que les antennes couvrent la zone terrestre voulue. Or le déploiement des panneaux solaires risque de modifier le mouvement ou la position du satellite, ce qui nécessite d'anticiper lors de la mise en orbite ces mouvements. On propose dans cette étude de quantifier l'impact du déploiement des panneaux sur la position angulaire du satellite.



FIGURE 6 – Satellite SPOT 4 en configuration déployée.

FIGURE 5 – Déploiement primaire.

Le système support des capteurs solaires est constitué d'un bras et de cinq panneaux rigides articulés qui sont repliés sur eux-même pendant le lancement puis qui vont se déployer en U

<sup>2.</sup> Extrait du concours banque PT 2001

en orbite (Fig. 6). Ce déploiement des panneaux n'est pas régulé. Le bras et les cinq panneaux sont liés par des articulations. Les six articulations comportent la motorisation nécessaire au déploiement. Cette motorisation est passive (pas de moteur) : elle est assurée par une lame élastique préalablement déformée. A la fin de l'ouverture, un dispositif anti-retour bloque l'articulation dans la position finale souhaitée. Le déploiement en orbite se déroule en deux phases :

- Le déploiement primaire est obtenu en déplaçant l'ensemble des panneaux hors du corps de satellite à l'aide d'un bras. Ce mouvement s'effectue dans le plan  $(\vec{x}_1, \vec{y}_1)$  (Fig. 5). Il fait l'objet de l'étude.
- Le déploiement secondaire s'effectue alors et les cinq panneaux se déploient en un mouvement spatial. Ce déploiement ne fait pas partie de l'étude.

#### Notations et paramétrage



FIGURE 7 – Paramétrage

L'ensemble est modélisé par trois solides, supposés indéformables, en mouvement plan par rapport à un repère  $R_0(O, \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ : le corps du satellite noté  $(S_1)$  de repère  $R_1(G_1, \vec{x}_1, \vec{y}_1, \vec{z}_1)$ avec  $\vec{z_1}$  confondu avec  $\vec{z_0}$ , le bras noté  $(S_2)$  de repère  $R_2(O_2, \vec{x_2}, \vec{y_2}, \vec{z_1})$  et l'ensemble des cinq panneaux noté  $(S_3)$  de repère  $R_3(O_3, \vec{x}_3, \vec{y}_3, \vec{z}_1)$ . Le bras  $(S_2)$  est en liaison pivot d'axe  $(O_2, \vec{z}_1)$ avec  $(S_1)$ , le bloc panneaux  $(S_3)$  est en liaison pivot d'axe  $(O_3, \vec{z_1})$  avec le bras. On note  $G_1$ ,  $G_2, G_3$  les centres de gravité respectivement de  $(S_1)$ , de  $(S_2)$  et de  $(S_3)$ . Le corps de satellite  $(S_1)$  a une masse  $m_1$  et un moment d'inertie par rapport à  $(G_1, \vec{z_1})$  noté  $I_1$ ; le bras a une masse notée  $m_2$  et un moment d'inertie par rapport à  $(G_2, \vec{z_1})$  noté  $I_2$ ; le bloc panneaux a une masse notée  $m_3$  et un moment d'inertie par rapport à  $(G_3, \vec{z_1})$  noté  $I_3$ . Les positions des principaux points et paramètres angulaires sont donnés par : . . 1

$\overrightarrow{G_1O_2} = a \vec{x_1} + b \vec{y_1}$	Caractéristiques numériques des solides $S_i$			
$\overrightarrow{O_2 G_2} = d_2 \vec{r}_2$		Solide 1	Solide 2	Solide 3
$\overrightarrow{O_2O_2} = \overrightarrow{a_2.x_2}$	Longueur $a(m)$	2.5		
$\overrightarrow{O_2O_3} = \iota_2 . \iota_2$	Longueur $b(m)$	1		
$O_3G_3 = a_3.x_3$	Longueur $l_i(m)$		1.7	3
$({x_0,x_1}) = \theta_1$	Position de $G_i : d_i(m)$		1	1.4
$(\vec{x}_1, \vec{x}_2) = \theta_2$	Masse $m_i$ (kg)	2600	6	270
$(ec{x}_2, ec{x}_3) =  heta_3$	Inertie $I_i$ $(kg.m^2)$	6300	182	405

### Efforts appliqués

Une la déformable exerce à l'intérieur de chaque articulation une action mécanique de sorte que les torseurs de liaisons s'écrivent :

$$- \operatorname{de} S_{1} \operatorname{sur} S_{2} : \left\{ \mathcal{T}_{1/2} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{R}(S_{1}/S_{2}) \\ \vec{C}(O_{2}, S_{1}/S_{2}) \end{array} \right\} \operatorname{avec} \vec{C}(O_{2}, S_{1}/S_{2}).\vec{z}_{1} = -k_{2}.(\theta_{2} - \theta_{20}).$$

$$- \operatorname{de} S_{2} \operatorname{sur} S_{3} : \left\{ \mathcal{T}_{2/3} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \dot{R}(S_{2}/S_{3}) \\ \vec{C}(O_{3}, S_{2}/S_{3}) \end{array} \right\} \operatorname{avec} \vec{C}(O_{3}, S_{2}/S_{3}).\vec{z}_{1} = -k_{3}.(\theta_{3} - \theta_{30}).$$

avec  $\theta_{20}$  et  $\theta_{30}$  des constantes de prédéformation des articulations. Elles seront prises nulles dans la suite de l'étude.

	Articulation 1–2	Articulation 2–3
Raideur $k_i$ (N.m/rad)	0.25	0.25
Prédéformation $\theta_{i0}$ (rad)	0	0

Caractéristiques numériques des articulations

### 2.1 Position du centre d'inertie

On appelle G le centre d'inertie de l'ensemble  $\{(S_1), (S_2), (S_3)\}$ . On cherche à montrer que la position de G, lorsque  $\theta_2$  et  $\theta_3$  varient, reste très proche de celle de  $G_1$  (Fig. 7).

- 1. Écrire la relation vectorielle donnant la position de G dans le repère  $R_1$  en fonction de  $m_1, m_2, m_3$ , des paramètres de position et des grandeurs géométriques. On pourra noter  $m = m_1 + m_2 + m_3$ .
- 2. En supposant  $m_2 \ll m_1$  et  $m_3 \ll m_1$ , en déduire que l'on peut confondre G et  $G_1$  au premier ordre. Cette hypothèse simplificatrice sera faite dans toute la suite du problème.

### 2.2 Essai de déploiement du bras au sol

Afin de qualifier la structure, de nombreux essais sont effectués au sol en laboratoire. Cette étude préliminaire portera sur le déploiement primaire dans le référentiel  $R_0$  lié au laboratoire et supposé galiléen. L'ensemble satellite-bras-panneaux est placé sur une table à coussin d'air de normale  $\vec{z_0}$  verticale ascendante confondue avec  $\vec{z_1}$  réalisant une liaison appui-plan parfaite.

Dans cette partie, on suppose que le déploiement du bras se fait préalablement au déploiement du bloc panneaux :  $\theta_2 \in [0, \pi]$ ,  $\theta_3 = -\pi$ . L'ensemble  $\{(S_2), (S_3)\}$  est considéré comme un solide indéformable  $(S_{23})$ . On notera  $m_{23}$  sa masse,  $G_{23}$  son centre de gravité,  $I_{23}$  le moment d'inertie par rapport à  $(G_{23}, \vec{z_1})$ .

- 1. Donner la position  $d_{23}$  de  $G_{23}$  dans  $R_2$  tel que  $\overrightarrow{O_2G_{23}} = d_{23}.\vec{x}_2$  et la valeur de  $I_{23}$  en fonction des caractéristiques de  $(S_2)$  et de  $(S_3)$ . Faire l'application numérique.
- 2. À l'instant initial (t = 0), l'ensemble  $\{(S_1), (S_{23})\}$  est immobile par rapport à  $R_0$ . Justifier, en précisant les hypothèses nécessaires, que le point G reste immobile, pendant le déploiement, par rapport au référentiel galiléen lié à la Terre. En déduire que le point  $G_1$ , peut alors être considéré comme pratiquement fixe par rapport à  $R_0$  et sera pris comme origine O de ce repère. Cette hypothèse sera faite pour toute la suite de l'étude.
- 3. Après avoir isolé  $(S_1)$ , écrire le théorème du moment dynamique en  $O_2$ . En déduire une équation scalaire de mouvement.
- 4. Après avoir isolé  $\{(S_1), (S_{23})\}$ , écrire le théorème du moment dynamique en  $O_2$ . En déduire une équation scalaire de mouvement. Comment évolue le moment cinétique de l'ensemble isolé au cours du déploiement?



FIGURE 8 – Paramétrage déploiement du bras

5. Hypothèse pour la résolution : L'effet de  $m_{23}$  est négligeable devant celui de  $I_{23}$  : on supposera  $m_{23} = 0$ . Montrer que les équations de mouvement se ramènent à un système différentiel du second ordre à coefficients constants. Résoudre le système et donner l'expression de  $\theta_1(t)$  et de  $\theta_2(t)$  en fonction des caractéristiques cinétiques du système. Les conditions initiales sont :

$$\begin{aligned} \theta_1(t=0) &= 0 & \dot{\theta}_1(t=0) = 0 \\ \theta_2(t=0) &= \pi & \dot{\theta}_2(t=0) = 0 \end{aligned}$$

On note  $t_1$ , l'instant pour lequel le solide  $S_{23}$  arrive en butée avec le solide  $S_1 : \theta_2(t_1) = 0$ . Donner la valeur de  $\theta_1(t_1)$  et  $\theta_2(t_1)$  au moment du choc.

- 6. On suppose que pour l'angle  $\theta_2(t_1) = 0$ , un dispositif d'accrochage rend solidaire les deux solides  $\{(S_1), (S_{23})\}$ . L'ensemble se comporte alors comme un solide noté  $\{(S_{123})\}$ . En tenant compte de l'évolution du moment cinétique de  $\{(S_1), (S_{23})\}$  (c.f. 4) et en tenant compte des conditions initiales (c.f. 5), donner l'évolution du mouvement de  $\{S_{123}\}$  par rapport à  $R_0$  pour  $t > t_1$ .
- 7. Au regard de cette étude, conclure sur le mouvement et le positionnement du satellite à assurer lors de la mise en orbite, afin d'obtenir un positionnement correct après déploiement des panneaux solaires.
- 8. Après avoir écrit le théorème de l'énergie cinétique relatif à l'ensemble  $\{(S_1), (S_{23})\}$  dans son mouvement par rapport à  $R_0$  entre les instants t = 0 et  $t > t_1$ , qualifier la nature du choc à l'instant  $t_1$ . Quel type de composant faut-il implanter dans les articulations pour assurer ce type de choc?