

TD 7 Cinématique-Statique

Compétences travaillées :

Pour les révisions de cinématique :

- Réaliser un graphe de structure du mécanisme,
- Réaliser un schéma cinématique lorsque la modélisation des liaisons est connue,
- Écrire les relations de fermeture cinématique,
- Déterminer le torseur cinématique d'un solide par rapport à un autre,
- Résoudre un problème de manière analytique.

Pour les révisions de statique :

- Isoler un solide et effectuer un bilan des AM extérieures,
- Appliquer le PFS, la modélisation des liaisons et des efforts étant donnée, ainsi que le séquençage des isolements,
- Dans le cas de liaisons non parfaites comportant du frottement : citer et appliquer les lois de Coulomb, sur des efforts globaux ou locaux.
- Dans le cas d'un contact surfacique, à partir d'une modélisation locale de répartition de p , déterminer l'action globale tangentielle de f .

1 Dispositif de réglage de l'incidence des pales d'hélicoptère¹

1.1 Présentation

Un hélicoptère crée sa portance grâce au mouvement de rotation du rotor principal entraîné à l'aide de la turbine. Pour permettre à l'hélicoptère de se déplacer suivant les différentes directions, les pales prennent, suivant un axe radial, une incidence qui varie au cours de la rotation du rotor. Le dispositif qui transmet les consignes du pilote et qui permet d'imposer cette variation est le plateau de pas cyclique dont l'orientation est fixée par l'intermédiaire de plusieurs vérins hydrauliques. La figure 1 présente le mécanisme complet. Sur ce schéma n'est pas représenté le mécanisme permettant l'entraînement en rotation suivant un axe vertical des solides 4, 5, 6 et 8 qui ne fera pas l'objet de l'étude. Les 3 figures 2, 3 et 4 présentent 3 configurations du dispositif de réglage de l'incidence des pales.

Objectif : déterminer le nombre d'actionneurs nécessaires au fonctionnement du dispositif et déterminer les efforts supportés, en vue de les dimensionner conformément au Cahier des Charges donné dans le tableau 1).

1.2 Étude spatiale du système complet

La figure 1 fait apparaître 13 solides (NB : l'indice ' fait référence aux pièces de la partie gauche).

- Bâti 0,

1. Extrait du sujet du concours de l'école de l'air 2005 filière PSI.

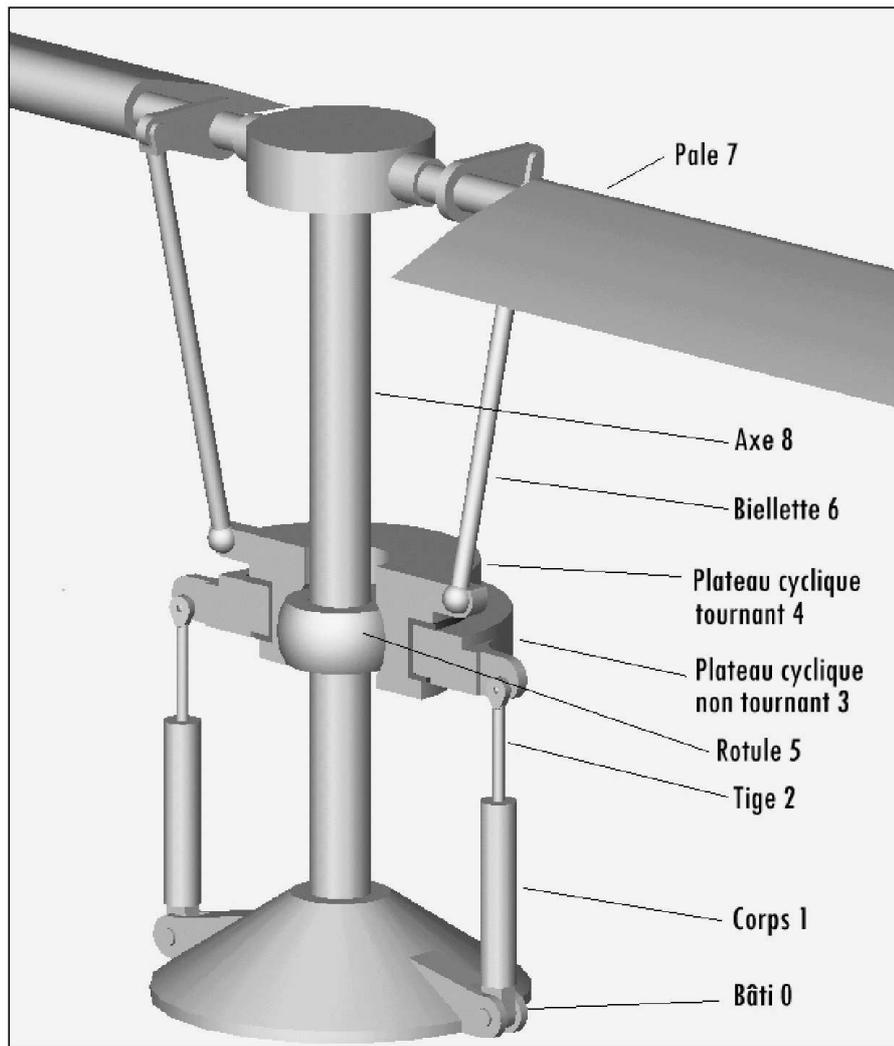


FIGURE 1 – Plateau de pas cyclique.

- Corps 1 et 1' (en liaison pivot avec le Bâti 0),
- Tige 2 et 2' (en liaison avec le corps du vérin, respectivement 1 et 1', et en liaison rotule avec
- le plateau cyclique non tournant 3),
- Plateau cyclique non tournant 3 (en liaison pivot avec le plateau tournant 4),
- Plateau cyclique tournant 4,
- Rotule 5,
- Bielles 6 et 6' (montées en liaison rotule à chacune de leur extrémité),
- Pales 7 et 7' (en liaison pivot avec l'axe rotor 8),
- Axe rotor 8 (en liaison pivot avec le Bâti 0).

Un dispositif extérieur bloque, au niveau de la liaison rotule entre le plateau cyclique 4 et la rotule 5, la rotation suivant l'axe du rotor. La liaison équivalente entre le plateau cyclique tournant 4 et l'axe rotor 8 peut être modélisée par une liaison non normalisée à 3 degrés de liberté (une translation suivant l'axe du rotor, et deux rotations perpendiculaires à cet axe).

Q.1. En supprimant le solide 5, construire le graphe de structure du mécanisme présenté figure 1, en faisant apparaître sur chaque arc le nombre de degrés de liberté de la liaison considérée.

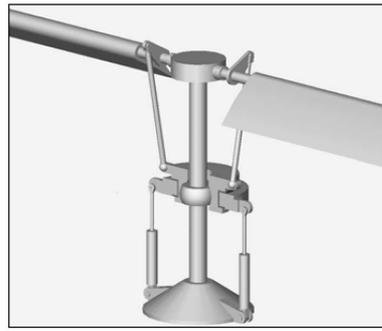
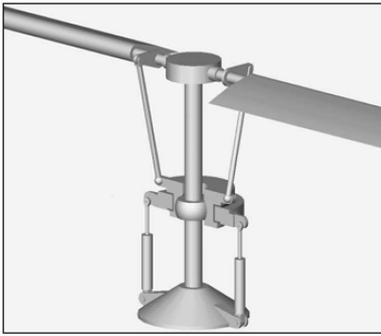


FIGURE 2 – Hélicoptère à l'arrêt. Les pales sont en position horizontales (incidence nulle).

FIGURE 3 – Hélicoptère en vol stationnaire. Les pales présentent la même incidence.

FIGURE 4 – Hélicoptère en déplacement. Les pales ne présentent pas la même incidence.

Fonction de service	Critère	Niveau
FS1 : Commander le dispositif	Encombrement	imposé
	Type d'actionneurs	vérins hydrauliques
	Vitesse de sortie de tige	à déterminer
	Effort maximal à transmettre	à déterminer

TABLE 1 – Extrait du CdCF de la commande du dispositif de réglage d'incidence.

Remarque : Étant donné la lourdeur des calculs pour une étude du mécanisme complet, on se propose d'étudier un mécanisme plan dont le fonctionnement permet d'appréhender le dispositif spatial.

1.3 Étude du bloc orientation du plateau cyclique.

On suppose connaître les vitesses de déplacement des tiges des vérins hydrauliques. Dans cette deuxième partie, on cherche les mouvements correspondants, du plateau cyclique non tournant 3. Afin de simplifier l'étude, on construit un modèle plan de ce dispositif, constitué des solides suivants (figure 5) :

- Bâti 0 : lié au corps de l'hélicoptère.
- Plateau 3 en liaison linéaire annulaire (sphère - cylindre) d'axe (E, \vec{y}) avec le Bâti 0.

Un premier vérin permet d'actionner le dispositif :

- Corps 1 en liaison pivot d'axe (G, \vec{z}) avec le Bâti 0.
- Corps 1 en liaison pivot glissant d'axe (G, \vec{y}_1) avec la tige 2.
- Tige 2 en liaison pivot d'axe (F, \vec{z}) avec le plateau 3.

Données : $\beta = (\vec{y}, \vec{y}_1)$ $\vec{OG} = g.\vec{x}$ $\vec{OF} = g.\vec{x} + f(t).\vec{y}_1$ $\vec{OE} = e(t).\vec{y}$

Les variations de l'angle β étant faibles, on pourra faire l'approximation que $\beta = 0$, ce qui caractérise la position de référence. Toute l'étude cinématique sera effectuée autour de la position de référence, ce qui conduit à confondre \vec{y} et \vec{y}_1 .

Q.2. Écrire les torseurs cinématiques des différentes liaisons, dans le cadre d'une modélisation plane.

Q.3. Écrire la fermeture cinématique au point O, pour la position de référence.

Q.4. En déduire l'indice de mobilité cinématique m , qui définit le nombre de paramètres indépendants permettant de fixer de manière unique la position de chacune des pièces.

Q.5. Expliquer la nécessité d'utiliser deux vérins.

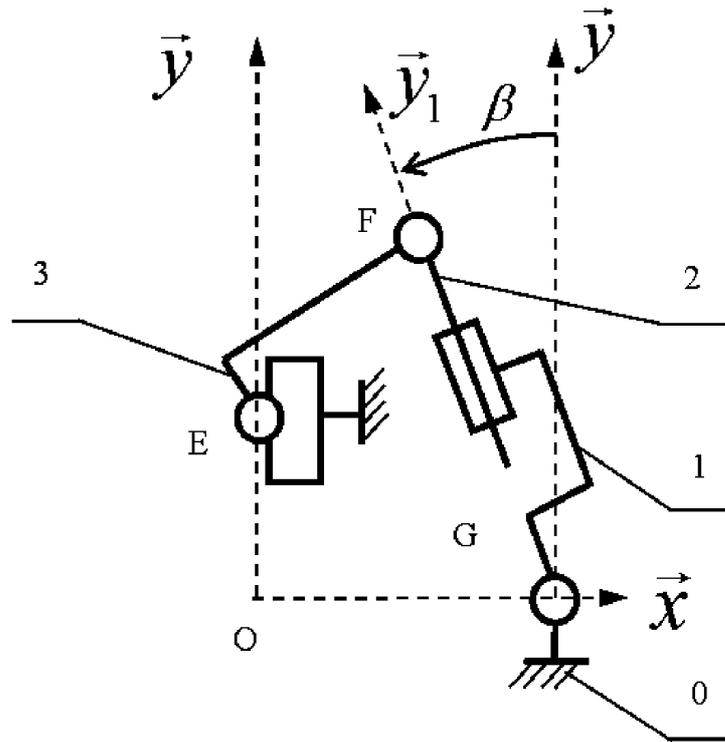


FIGURE 5 – Schéma cinématique du dispositif, décrit dans le plan (O, \vec{x}, \vec{y}) .

On rajoute un deuxième vérin :

- Corps 1' en liaison pivot d'axe (G', \vec{z}) avec le Bâti 0.
- Corps 1' en liaison pivot glissant d'axe (G', \vec{y}_1) avec la tige 2'.
- Tige 2' en liaison pivot d'axe (F', \vec{z}) avec la pièce 3.

Données : NB : l'indice ' caractérise la partie située à gauche de l'axe (O, \vec{y}) .

- $\vec{OG}' = -g.\vec{x}$.
- $\vec{OF}' = -g.\vec{x} + f'(t).\vec{y}_1$.

où $g = 15 \text{ cm}$ et $30 \text{ cm} < f' < 50 \text{ cm}$.

Q.6. Construire le schéma cinématique du dispositif avec deux vérins.

Q.7. Écrire, au point O et pour la position de référence, les fermetures cinématiques du dispositif complet en tenant compte des deux vérins.

Q.8. En déduire l'indice de mobilité du mécanisme complet. Commenter la valeur trouvée.

Q.9. On étudie la loi entrée-sortie du point de vue cinématique autour de la position de référence et on fixe :

- $\vec{V}(M \in 2/1).\vec{y} = +v$
- $\vec{V}(M \in 2'/1).\vec{y} = -v$

Déterminer $\vec{V}(E \in 3/0)$ et $\vec{\Omega}_{3/0}$. Quel est le mouvement de 3 par rapport à 0, dans ce cas ?

Q.10. Le pilotage peut nécessiter une vitesse de rotation $\omega_{3/0}$ maximale de 2 rad.s^{-1} . Compléter le critère de vitesse du cahier des charges.

Q.11. Les pales du rotor principal appliquent par l'intermédiaire des biellettes et du plateau cyclique tournant des actions mécaniques sur le solide 3 que l'on modélise par :

$$\{\text{Text}/3\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{ext} = F_x.\vec{x} + F_y.\vec{y} \\ \vec{M}_{E,ext \rightarrow 3} = M_E.\vec{z} \end{array} \right\}_E$$

où, dans les cas les plus défavorables, $F_x = 50 \text{ N}$, $F_y = 500 \text{ N}$, et $M_e = 90 \text{ Nm}$.

Déterminer l'effort exercé par chacun des vérins que l'on notera :

$$\{T_{\text{fluide}/2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_2 = F_2 \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_G \quad \{T_{\text{fluide}/2'}\} = \left\{ \begin{array}{l} \vec{F}_{2'} = F_{2'} \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{array} \right\}_{G'}$$

Effectuer l'application numérique et compléter le cahier des charges.

Pour cette question, on néglige la masse et les inerties des différentes pièces, et on suppose les liaisons parfaites.

2 Étude d'un ascenseur²

2.1 Mise en situation

On s'intéresse à la motorisation d'un ascenseur dont l'architecture est décrite figure 6 et dont un extrait du Cahier des Charges est donné dans le tableau 2. La cabine est suspendue à des câbles s'enroulant sur une poulie de traction, elle même entraînée par un motoréducteur (figure 7). À l'extrémité du câble se trouve un contre-poids, permettant d'équilibrer en partie le poids de la cabine (figure 6). Les gorges de la poulie sont de forme trapézoïdale (figure 8).

Pour les installations d'ascenseur, la norme impose l'utilisation de plusieurs câbles. Pour simplifier l'étude, on fait l'hypothèse que l'installation ne comporte qu'un seul câble (les résultats obtenus sont facilement transposables au système réel).

Objectif : Le problème réel posé est de déterminer l'angle α au sommet de la gorge pour que le câble ne glisse pas sur la poulie.

Fonction de service	Critère	Niveau
FS1 : Déplacer un ascenseur	Accélération maxi	$\Gamma_{max} = 0.5 \text{ m.s}^{-2}$
	Masse maxi de la cabine	$m_c = 1000 \text{ kg}$
	Masse du contreponds	$m_{cp} = 800 \text{ kg}$

TABLE 2 – Extrait du CdCF.

2.2 Étude du contact câble - poulie

On note (figure 9) :

- $\vec{F}_{cp \rightarrow \text{cable}}$: action du contreponds sur un brin du câble.
- $\vec{F}_{\text{cabine} \rightarrow \text{cable}}$: action de l'ensemble cabine+charge sur l'autre brin.

On étudie l'équilibre d'un petit élément de câble, que l'on suppose plat et d'épaisseur négligeable, en contact avec la poulie.

Cet élément de courroie est soumis :

- aux actions \vec{F}_1 et \vec{F}_2 des brins du câble situés avant et après avec $\|\vec{F}_1\| = F + dF$ et $\|\vec{F}_2\| = F$
- à l'action de la poulies

Hypothèse : L'action élémentaire de la poulie sur un élément de câble est un glisseur passant par C et de résultante :

$$\vec{dF}(\text{poulie} \rightarrow \text{cable}) = \vec{dN} + \vec{dT} \quad \text{où} \quad \vec{dN} = \|dN\| \cdot \vec{y} \quad \text{et} \quad \vec{dT} = -f_1 \cdot \|dN\| \cdot \vec{x}$$

2. Extrait du sujet du concours CCP 2005 filière PSI.

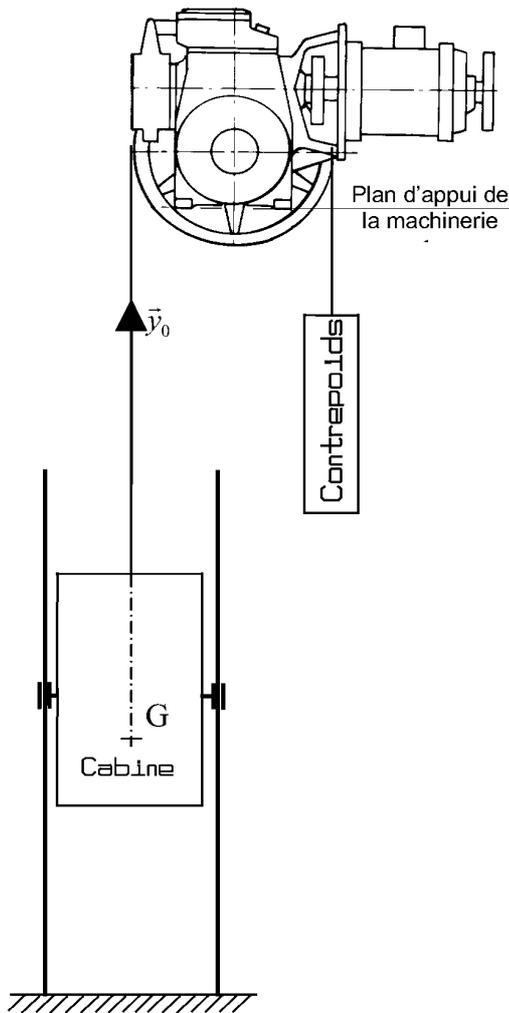


FIGURE 6 – Cabine et contre-poids.

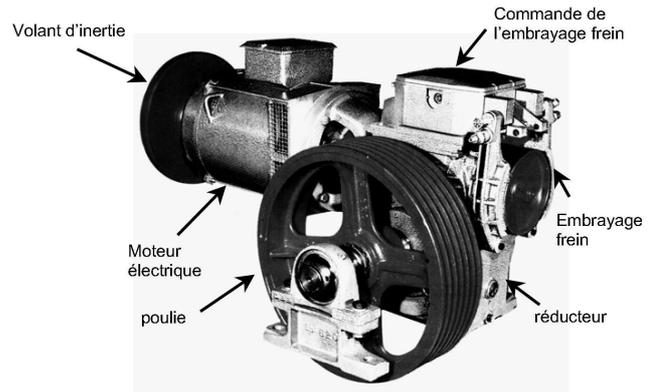


FIGURE 7 – Motoréducteur.

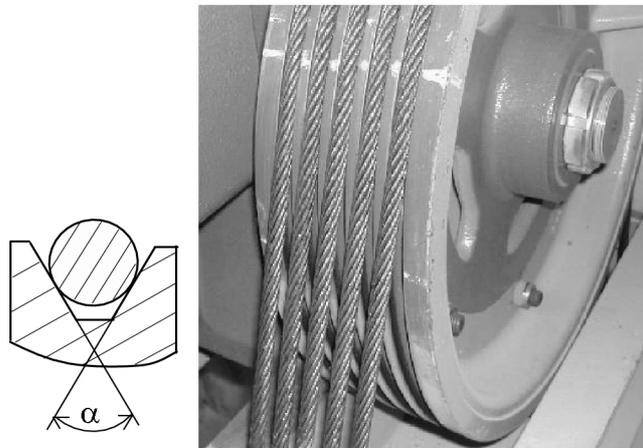


FIGURE 8 – Poulie du motoréducteur.

Avec f_1 facteur de frottement entre le câble et la poulie.

Q.12. Écrire les équations scalaires obtenues en appliquant le théorème de la résultante statique à l'élément de courroie étudié.

Q.13. En négligeant les éléments différentiels du second ordre et en considérant que $d\theta$ est très petit, montrer que les équations de la question précédente conduisent à l'équation différentielle $\frac{dF}{F} = f_1 \cdot d\theta$.

Q.14. Avec F qui varie de $\vec{F}_{cp \rightarrow cable}$ à $\vec{F}_{cabine \rightarrow cable}$ pour θ variant de 0 à π , montrer que l'on arrive à la relation : $\frac{\|\vec{F}_{cabine \rightarrow cable}\|}{\|\vec{F}_{cp \rightarrow cable}\|} = e^{f_1 \cdot \pi}$

2.3 Étude du cas où le câble de section circulaire est en contact avec une gorge trapézoïdale

Dans l'étude précédente, on a fait l'hypothèse que le câble était plat et d'épaisseur négligeable. L'expression obtenue reste vraie pour une forme différente à condition de remplacer f_1 facteur de frottement entre le câble et la poulie par un facteur μ à déterminer.

Pour cela, on va utiliser une représentation simplifiée du contact entre le câble et la poulie (figure 10) : l'élément de câble est représenté par une sphère et la poulie par une rainure trapézoïdale, de sorte que le contact câble / poulie soit ponctuel.

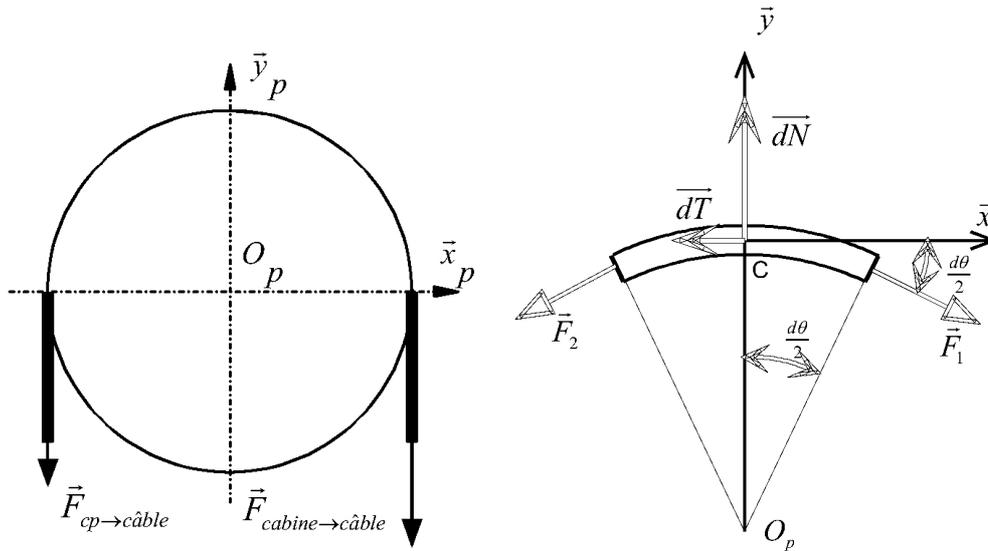


FIGURE 9 – Modélisation de l’enroulement du câble sur la poulie.

Q.15. Sur le document réponse figure 11, mettre en place les actions de contact normale et tangentielle en M_1 et M_2 de la poulie sur le câble, lorsque le câble est à la limite du glissement par rapport à la poulie.

Q.16. Déterminer $\mu = \frac{\|\vec{T}\|}{\|\vec{N}\|}$ où \vec{N} et \vec{T} sont les composantes normale et tangentielle de la résultante des actions de la poulie sur le câble, en fonction de f_1 et α .

Q.17. En appliquant le principe fondamental de la dynamique à la cabine, puis au contre-poids, déterminer les actions $\vec{F}_{cp \rightarrow \text{cable}}$ et $\vec{F}_{\text{cabine} \rightarrow \text{cable}}$ du contre-poids et de la cabine sur les deux brins du câble. Les calculs se feront dans le cas de la montée de la cabine à l’accélération.

Q.18. Déterminer, à partir des expressions précédentes, et du résultat de la question 14, l’expression de l’angle α pour que le câble ne glisse pas par rapport à la poulie. Sachant que le coefficient de frottement acier/acier vaut environ 0.1, déterminer l’angle au sommet maximal pour qu’il n’y ait pas glissement.

Sur le système réel, on mesure $\alpha = 35^\circ$. Conclure quand au dimensionnement effectué par le constructeur.

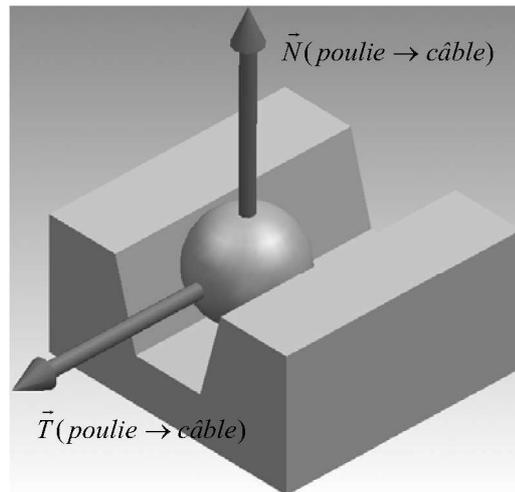


FIGURE 10 – Représentation simplifiée du contact entre le câble et la poulie.

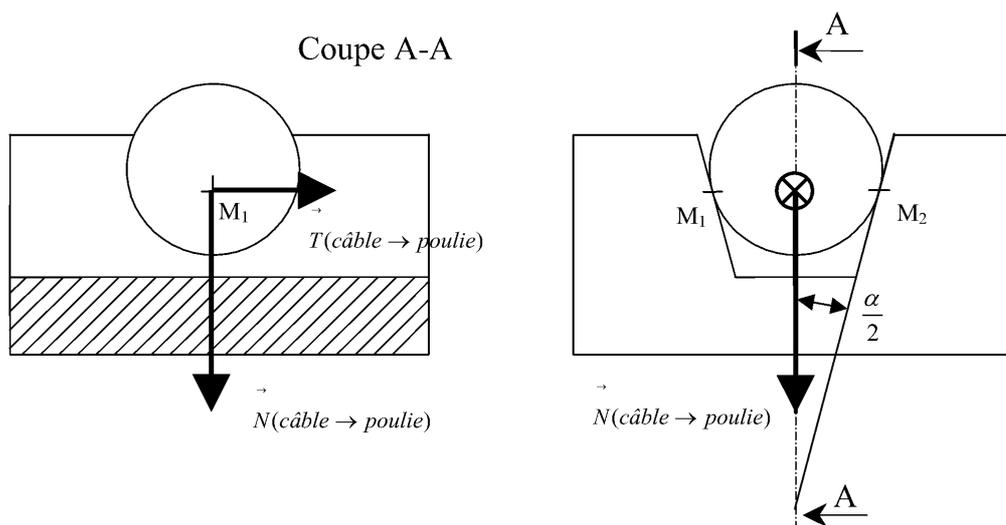


FIGURE 11 – Document réponse : Actions de contact.