TD Equilibrage

Compétences travaillées :
– Déterminer la forme de la matrice d'inertie à partir de la géométrie.
– Déterminer tout ou partie du torseur cinétique d’un solide par rapport à un autre.
– Déterminer tout ou partie du torseur dynamique d’un solide par rapport à un autre.
– Appliquer le PFD, la modélisation des liaisons et des efforts étant donnée, ainsi que le séquencement des isolements.
– Conduire une étude dynamique pour déterminer certaines composantes d’AM transmissibles.

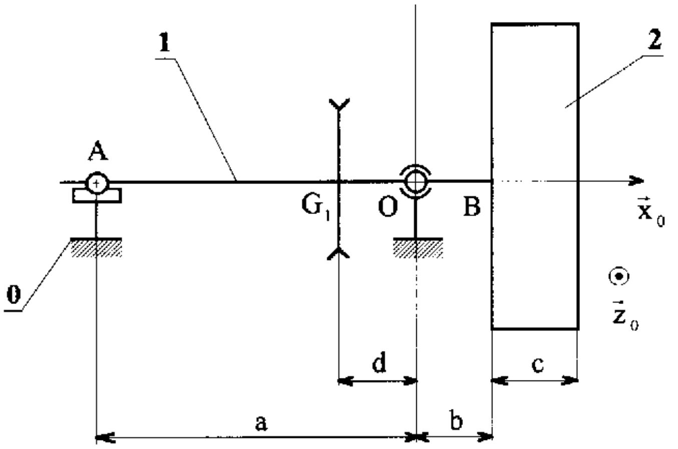
I Equilibrage d’une roue de voiture

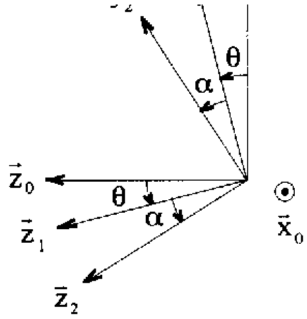
L'équilibreuse étudiée permet l'équilibrage des roues démontées. On donne un extrait du Cahier des Charges dans le tableau suivant.

Objectif : on cherche à déterminer la loi déterminant la position et la masse de chacune des masselottes, de manière à pouvoir l’implémenter dans la partie commande.

Fonction de service	Critère	Niveau
FS1 : équilibrer une roue de voiture par ajout de masselottes	Dimensions des roues	Toute roue de voiture
	Précision de l’équilibrage	Balourd inférieur à 5 N
	Nombre de masselottes	2

L’équilibreuse est constituée d'un arbre **1** guidé en rotation par deux paliers à roulement en O et A. Ces paliers en liaison élastique avec le bâti **0**, dans une seule direction à l'aide de deux lames flexibles, permettent l'enregistrement des composantes horizontales des résultantes d'action mécanique dans les paliers à roulement, par l'intermédiaire de deux capteurs couplés à un repérage de la position angulaire de l'arbre **1**.



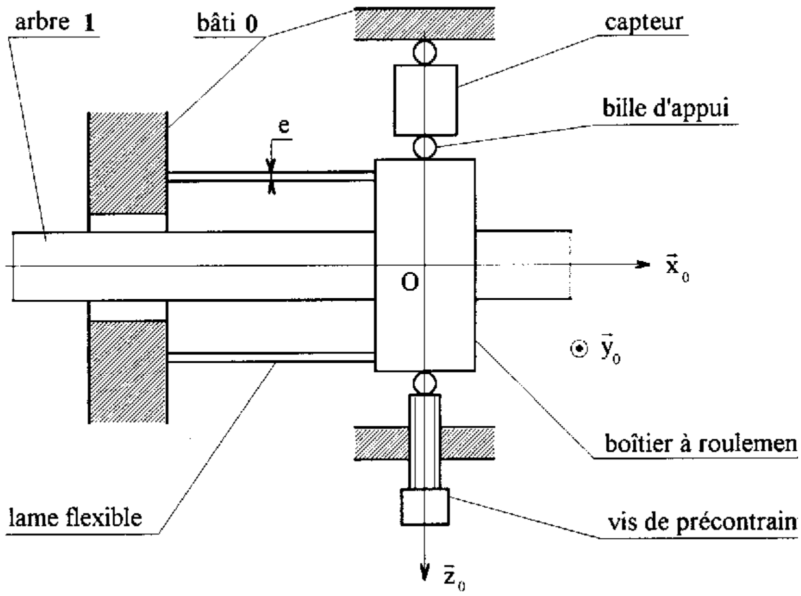


Le repère R_0 (O, $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$) est lié au bâti **0** ($\vec{y}_0$ vertical ascendant).

Le repère R_1 (O, $\vec{x}_0, \vec{y}_1, \vec{z}_1$) est lié à l'arbre **1**.
On pose $\theta = (\vec{y}_0, \vec{y}_1)$ avec $\dot{\theta}$ = constante.

L'arbre **1** est entraîné en rotation par une courroie sur une poulie fixée au centre d'inertie G_1 de l'arbre **1**. Le torseur d'action mécanique de la courroie sur la poulie est de la forme:

$$\mathrm{T}\,(\text{courroie}\rightarrow\text{poulie}) = {}_{G_1}\begin{Bmatrix} -T\,\vec{y}_0 \\ C_m\,\vec{x}_0 \end{Bmatrix}$$



L'arbre **1** (avec la poulie), de masse m_1, a pour moment d'inertie I_1 par rapport à l'axe (O, $\vec{x}_0$) et est équilibré en rotation.
La roue **2**, à équilibrer, est fixée sur **1**. Le repère R_2 (B, $\vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2$) est lié à la roue **2** avec $\alpha = (\vec{y}_1, \vec{y}_2)$, angle constant mais à priori inconnu. La roue **2**, de masse m_2, a pour centre d'inertie G_2 dont la position est donnée par $\overrightarrow{BG_2} = h\,\vec{x}_0 + \rho\,\vec{z}_2$, h et ρ étant des inconnues. La matrice d'inertie en B de la roue **2** dans la base ($\vec{x}_0, \vec{y}_2, \vec{z}_2$) est de la forme :

$$\mathrm{J}_B(2) = \begin{pmatrix} A & -F & -E \\ -F & B & -D \\ -E & -D & C \end{pmatrix}_{R_2}$$

On note $\mathrm{T}\,(0\rightarrow 1) = {}_{O}\begin{Bmatrix} X_O & 0 \\ Y_O & 0 \\ Z_O & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$ et $\mathrm{T}'\,(0\rightarrow 1) = {}_{A}\begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ Y_A & 0 \\ Z_A & 0 \end{Bmatrix}_{R_0}$ les torseurs d'actions mécaniques de **0** sur **1**.

I.1 Conditions d'équilibrage de la roue

Par définition, une roue est équilibrée si les composantes des actions mécaniques de liaison sont constantes dans le temps pour une rotation uniforme de la roue. Si ce n'est pas le cas, cela risque d'engendrer des vibrations sources d'une détérioration rapide des paliers. L'objectif de cette première partie est de déterminer les conditions à respecter sur les caractéristiques géométriques et inertielles de la roue afin d'être équilibrée.

1. *Déterminer les composantes X_O, Y_O, Z_O, Y_A et Z_A des résultantes d'actions mécaniques du bâti **0** sur l'arbre **1** en fonction des données.*

2. *En déduire les paramètres géométriques et inertiels à annuler afin d'être équilibré.*

I.2 Mesure des caractéristiques géométriques et inertielles d'une roue

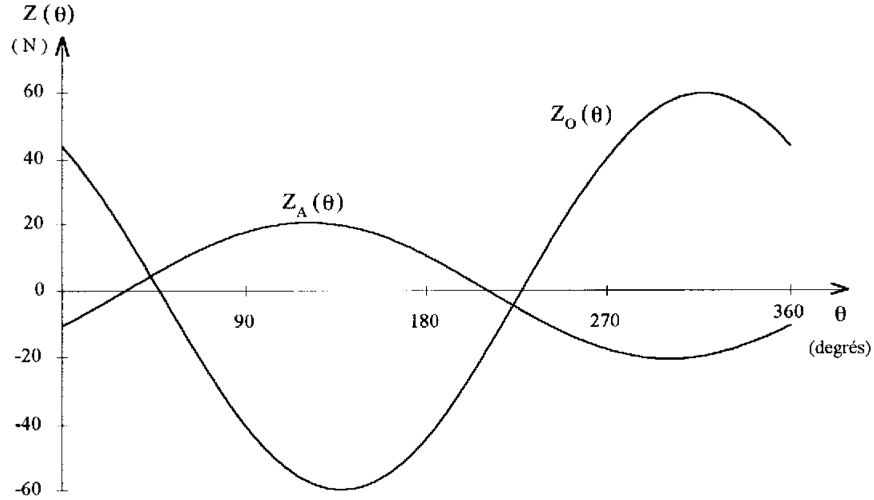
On utilise deux capteurs d'efforts, en O et A, situés dans un plan horizontal et couplés à un capteur angulaire de l'arbre **1**, pour mesurer les composantes suivant $\vec{z}_0$ des résultantes d'action mécanique $Z_O(\theta)$ et $Z_A(\theta)$ du bâti **0** sur l'arbre **1.**

3. *Déterminer, en fonction de $Z_0(0)$, $Z_0(\pi/2)$, $Z_A(0)$ et $Z_A(\pi/2)$, les coordonnées ρ et α du centre d'inertie G_2 de la roue **2**, ainsi que les produits d'inertie E et F.*

On donne:

m_2 = 18 kg
a = 460 mm
b = 80 mm
$\dot{\theta}$ = 60 rad/s

Les capteurs fournissent les courbes ci-contre et les valeurs ci-dessous:



θ en degrés	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330
$Z_O(\theta)$ en N	44,05	18,00	-12,86	-40,29	-56,92	-58,29	-44,05	-18,00	12,86	40,29	56,92	58,29
$Z_A(\theta)$ en N	-10,53	-0,28	10,04	17,68	20,57	17,96	10,53	0,28	-10,04	-17,68	-20,57	-17,96

4. *En déduire les valeurs numériques de ρ, α, E et F.*

I.3 Equilibrage de la roue

La roue sera équilibrée avec deux masselottes **3** et **4**, assimilables à des points matériels M_3 et M_4 de masse m_3 et m_4, situées de part et d'autre de la jante, de telle sorte que:

$$\overrightarrow{BM_3} = r\,\vec{u}_3 \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BM_4} = c\,\vec{x}_0 + r\,\vec{u}_4 \quad \text{avec} \quad \beta_i = (\vec{z}_2\,,\vec{u}_i)$$

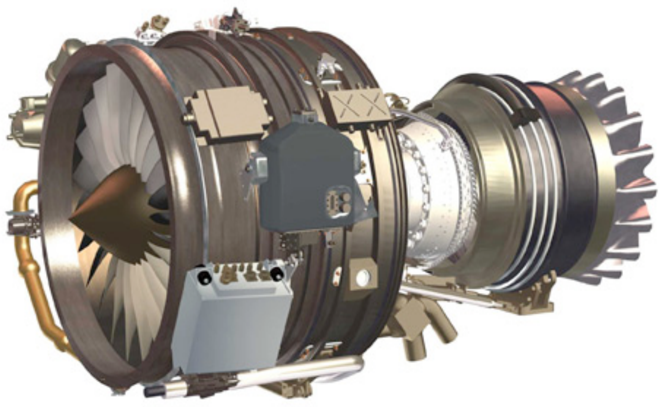
r étant le rayon de la jante et c son épaisseur.

5. *Ecrire les conditions d'équilibrage de la roue **2**. Vérifiez que le problème admet bien une solution.*
6. *Déterminer les masses m_3 et m_4 des masselottes ainsi que leur position β_3 et β_4 sur la jante en fonction des caractéristiques de la roue.*

On donne: r = 190 mm c = 180 mm

7. *En déduire les valeurs numériques de m_3, m_4, β_3 et β_4.*

II ROTOR DE TURBINE

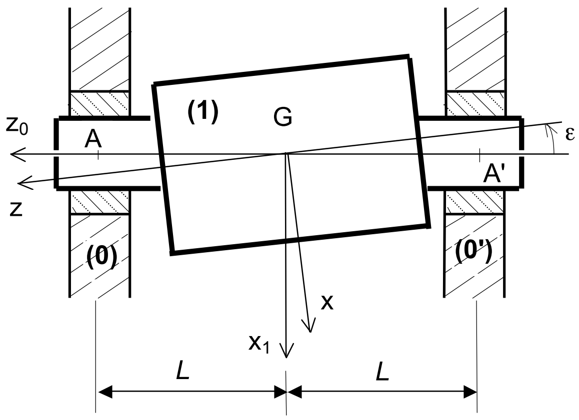


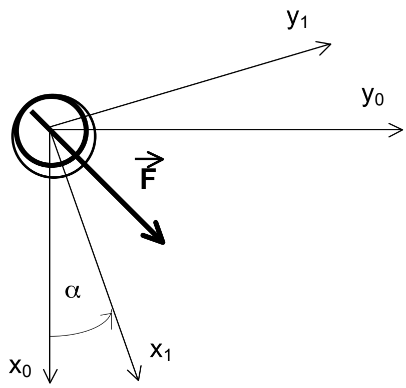
Pour répondre aux besoins spécifiques du marché de l'aviation régionale, Snecma (groupe Safran) propose depuis 2003 le moteur SaM146, développé en coopération avec le motoriste russe NPO Saturn, au sein d'une filiale commune PowerJet. Il permet d'équiper toute une famille d'avions court courrier (60 - 100 places) avec un même moteur.

Fonction de service	Critère	Niveau
FS1 : Transmettre la puissance du moteur	Encombrement	donné
	Durée de vie	50 000 h
	Vitesse de rotation	12 000 tr/min
	Masse en rotation	1500 kg

Objectif : Nous nous intéressons ici au désalignement maximal admissible entre l'axe de rotation du rotor et son axe principal d'inertie, de manière à vérifier le critère de durée de vie.

On note **1** le rotor de la turbine, sa masse m et son centre de gravité G. Il tourne autour d'un axe fixe horizontal Gz_0 et repose sur deux paliers **0** et **0'** équipés de coussinets en bronze (montés serrés dans les paliers) distants de $2L$. On modélise l'action des coussinets sur l'arbre du rotor par deux glisseurs $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ passant par A et A' et perpendiculaires à l'axe Gz_0 (frottement négligé et existence d'un jeu fonctionnel entre arbre et coussinets). À cause des imperfections de fabrication, l'axe de révolution Gz du rotor fait un angle ε avec l'axe Gz_0 (ε constant et très petit).





Soient les repères suivants:

- R_0 ($G\, x_0\, y_0\, z_0$) galiléen, avec Gx_0 vertical descendant, lié aux paliers
- R_1 ($G\, x_1\, y_1\, z_1$) lié au rotor **1** tel que $(x_0, x_1) = \alpha$
- R ($G\, x\, y\, z$) système d'axes principaux du rotor avec $(z_0, z) = \varepsilon$

Les moments principaux d'inertie du rotor en G sont notés A, A et C dans le repère R.

1 - Le rotor est-il équilibré statiquement, dynamiquement ? Justifier.

2 - Le rotor est lancé initialement à la vitesse ω par rapport à Gz_0 et les seules forces agissant sur lui sont la pesanteur et les actions des coussinets. Déterminer l'évolution de la vitesse angulaire $\dot{\alpha}(t)$ au cours du temps.

3 - On suppose ω = Cte. Déterminer le moment cinétique $\vec{\sigma}$ (G,1/0) et le moment dynamique $\vec{\delta}$ (G,1/0) du rotor en fonction de ε en projection dans le repère R (Tenir compte du fait que ε est très petit).

4 - Déterminer les coordonnées de $\vec{F}$ et $\vec{F}'$ dans le repère R_1. Montrer que $\vec{F}$ peut se mettre sous la forme $F_0\ \vec{x}_0 + F_1\ \vec{x}_1$, F_0 et F_1 étant des constantes à calculer.

5 - On suppose $A > C$. On désire étudier la position du point de contact entre l'arbre et les coussinets. Montrer en <u>représentant</u> $\vec{F}$ dans R_0 puis dans R_1 qu'il existe deux régimes:

- pour $\omega < \omega_0$, le contact se fait en tous les points de la circonférence de l'arbre; par contre, le contact ne se fait que sur un domaine limité du coussinet.

- pour $\omega > \omega_0$, le contact se fait en tous les points du coussinet; par contre, une partie seulement de la circonférence de l'arbre entre en contact avec le coussinet.

Calculer ω_0, en fonction de A, C, ε, L, m et g. Quel est le régime préférable?

6 - A.N.: $m = 1500$ kg; $A = 135$ kg m²; $C = 60$ kg m²; $L = 0{,}6$ m; $\omega = 12000$ tr/mn
Quelle valeur maximale (en degrés) peut-on tolérer pour ε pour rester dans le régime préférable?