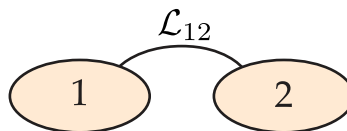


# THÉORIE DES MÉCANISMES

**Objectifs du cours :** La théorie des mécanismes est un outil conceptuel permettant d'aborder les mécanismes sous l'angle des espaces vectoriels cinématique et statique. Ce type d'analyse permet d'identifier les surcontraintes éventuelles dans le mécanismes, qui conduisent à des problèmes mal posés (non résoluble) en statique ou dynamique. Cet outil permet en outre de définir la notion de liaison équivalente.

## 1 Liaisons et espaces vectoriels associés

### 1.1 Caractérisation cinématique d'une liaison



Soient deux solides 1 et 2 en liaison l'un avec l'autre. La liaison autorise  $m$  mouvements parmi les 6 mouvements possibles de 2 par rapport à 1. Le torseur  $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$  est donc un élément d'un espace vectoriel  $\mathcal{L}_{12}$  de dimension  $m$ , caractérisant l'ensemble des mouvements possible de 2 par rapport à 1.

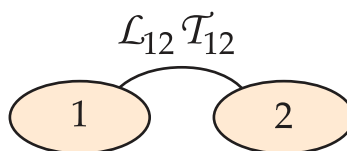
Exemple : liaison pivot d'axe  $(A, \vec{x})$

$$\mathcal{L}_{12} = \left\{ \left\{ \mathcal{V}_{2/1} \right\} = \begin{matrix} A \\ \left\{ \begin{matrix} \omega \cdot \vec{x} \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}, \omega \in \mathbb{R} \end{matrix} \right\}$$

L'espace vectoriel  $\mathcal{L}_{12}$  est de dimension 1.

$\mathcal{L}_{12}$  est un sous-espace de l'espace vectoriel des mouvements de corps rigide (espace des champs de torseurs  $T$ ).  $m$  est la *mobilité* de la liaison.

### 1.2 Caractérisation statique d'une liaison



L'effort transmissible dans une liaison est défini par dualité vis-à-vis des mouvements autorisés.

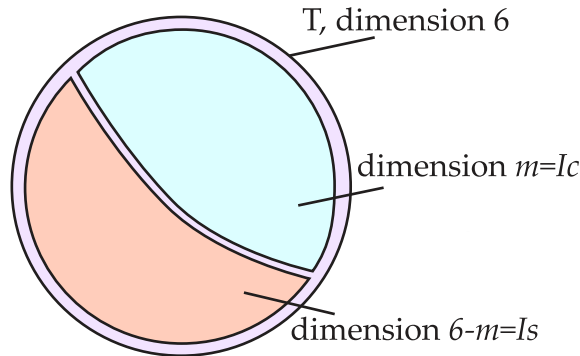
Pour une liaison parfaite, le torseur statique  $\{\mathcal{T}_{1/2}\}$  est tel que pour tout mouvement  $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ ,  $\{\mathcal{T}_{1/2}\} \otimes \{\mathcal{V}_{2/1}\} = 0$ . Il appartient donc à un sous-espace vectoriel  $\mathcal{T}_{12}$ , caractérisant l'ensemble des actions mécaniques transmissibles entre 1 et 2 :

$$\mathcal{T}_{12} = \{ \{ \mathcal{T}_{1/2} \} \in T / \forall \{ \mathcal{V}_{2/1} \} \in \mathcal{L}_{12}, \{ \mathcal{T}_{1/2} \} \otimes \{ \mathcal{V}_{2/1} \} = 0 \}$$

C'est un sous-espace de l'espace des champs de torseur  $T$ , orthogonal à  $\mathcal{L}_{12}$  et de dimension  $6 - m$ .

### 1.3 Interprétation graphique des espaces $\mathcal{L}_{12}$ et $\mathcal{T}_{12}$

$\mathcal{T}_{12}$  est l'orthogonal à  $\mathcal{L}_{12}$  dans  $T$ . Les deux espaces peuvent donc se représenter comme indiqué sur la figure.



Une première relation sur les dimensions indique :  $\dim \mathcal{L}_{12} + \dim \mathcal{T}_{12} = \dim T$  où  $\dim \mathcal{L}_{12} = m$  et  $\dim T = 6$ .

Si on note maintenant  $I_c$  le nombre d'inconnues cinématiques de la liaison ( $I_c = \dim \mathcal{L}_{12}$ ) et  $I_s$  le nombre d'inconnues statiques de la liaison ( $I_s = \dim \mathcal{T}_{12}$ ), on obtient la relation valable pour toutes les liaisons parfaites :

$$I_c + I_s = 6$$

## 2 Association de deux liaisons en parallèle

### 2.1 Point de vue cinématique

Soit  $\mathcal{L}_{12}$  la liaison équivalente à l'association en parallèle de deux liaisons  $\mathcal{L}_{12}^A$  et  $\mathcal{L}_{12}^B$ .



$\{\mathcal{V}_{2/1}\} \in \mathcal{L}_{12}$  est donc à la fois un élément de  $\mathcal{L}_{12}^A$  et  $\mathcal{L}_{12}^B$ . On en déduit l'égalité :

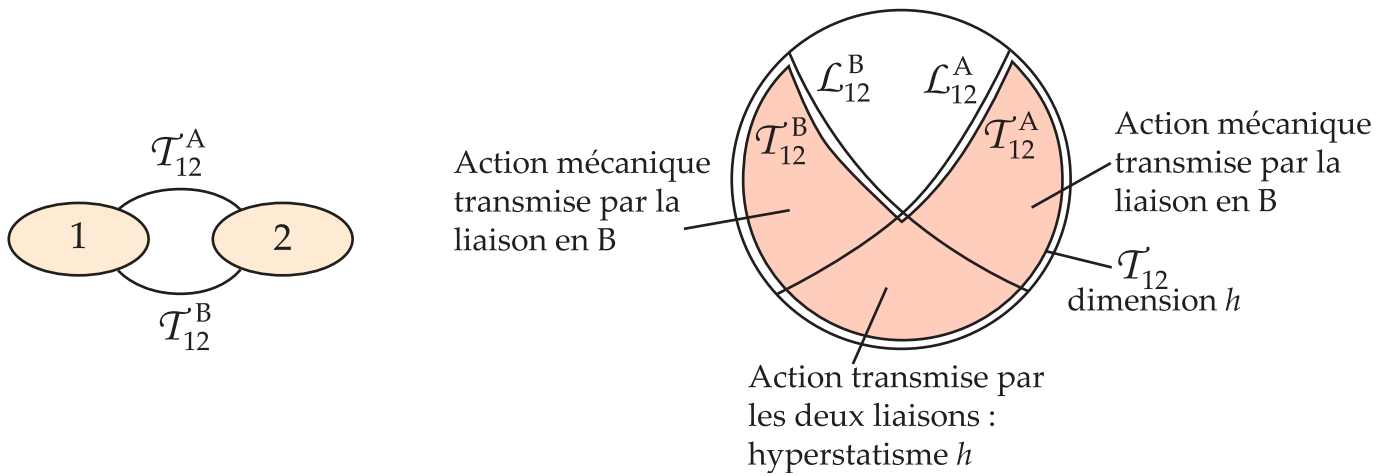
$$\mathcal{L}_{12} = \mathcal{L}_{12}^A \cap \mathcal{L}_{12}^B$$

Le nombre de mobilités autorisés entre 1 et 2 vaut :  $m = \dim \mathcal{L}_{12} = \dim \mathcal{L}_{12}^A \cap \mathcal{L}_{12}^B$ .

### 2.2 Point de vue statique

L'action mécanique résultante des deux actions mécaniques transmises par les deux liaisons vaut :

$$\{\mathcal{T}_{1/2}\} = \{\mathcal{T}_{1/2}^A\} + \{\mathcal{T}_{1/2}^B\}$$



On en déduit :  $\mathcal{T}_{12} = \mathcal{T}_{12}^A + \mathcal{T}_{12}^B$ .

Connaissant  $\{\mathcal{T}_{1/2}\}$ , il est possible de déterminer la part transmise par chaque liaison  $A$  et  $B$ , sauf pour les composantes communes de  $\mathcal{T}_{12}^A \cap \mathcal{T}_{12}^B$ .

Lorsque  $\mathcal{T}_{12}^A \cap \mathcal{T}_{12}^B \neq \emptyset$ , on dit que la liaison est *hyperstatique* de degré  $h = \dim \mathcal{T}_{12}^A \cap \mathcal{T}_{12}^B$ .

### 2.3 Relation liant mobilité, hyperstatisme et nombres d'inconnues

—  $\mathcal{T}_{12}^A \cap \mathcal{T}_{12}^B$  est orthogonal à  $\mathcal{L}_{12}^A + \mathcal{L}_{12}^B$  d'où :

$$\begin{aligned} \dim(\mathcal{T}_{12}^A \cap \mathcal{T}_{12}^B) &= 6 - \dim(\mathcal{L}_{12}^A + \mathcal{L}_{12}^B) \\ \Leftrightarrow h &= 6 - (\dim \mathcal{L}_{12}^A + \dim \mathcal{L}_{12}^B) + \dim(\mathcal{L}_{12}^A \cap \mathcal{L}_{12}^B) \\ \Leftrightarrow h &= 6 - I_c + m \end{aligned}$$

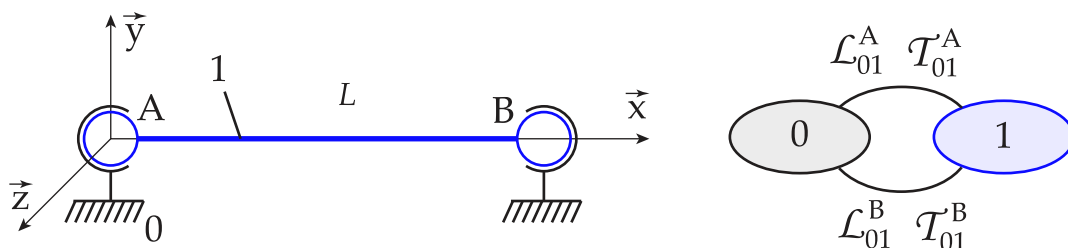
où  $I_c$  est le nombre d'inconnues cinématiques des torseurs  $\{\mathcal{V}_{2/1}^A\}$  et  $\{\mathcal{V}_{2/1}^B\}$ , et  $m$  la mobilité de la liaison  $\mathcal{L}_{12}$ .

—  $\mathcal{T}_{12}$  est orthogonal à  $\mathcal{L}_{12}$ . Donc  $\dim \mathcal{T}_{12} = 6 - \dim \mathcal{L}_{12}$ . On en déduit :

$$\begin{aligned} (\dim \mathcal{T}_{12}^A + \dim \mathcal{T}_{12}^B) - \dim(\mathcal{T}_{12}^A \cap \mathcal{T}_{12}^B) &= 6 - m \\ \Leftrightarrow N_s - h &= 6 - m \end{aligned}$$

où  $N_s$  est le nombre d'inconnues statiques des torseurs  $\{\mathcal{T}_{1/2}^A\}$  et  $\{\mathcal{T}_{1/2}^B\}$ , et  $h$  l'hyperstatisme de la liaison.

### 2.4 Exemple : liaison pivot réalisée à l'aide de deux liaisons rotules



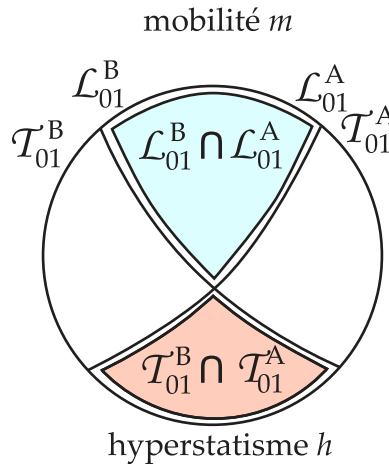
On observe :

- $m = 1$  : 1 mobilité autorisée (rotation suivant  $(A, \vec{x})$ ).
- $I_c = 2 \times 3$  (trois rotations pour chaque rotule)
- $I_s = 2 \times 3$  (trois efforts pour chaque rotule)

On en déduit :

- Par la relation cinématique :  $h = 6 - I_c + m = 6 - 6 + 1 = 1$
- Par la relation statique :  $h = I_s - 6 + m = 6 - 6 + 1 = 1$

Le degré d'hyperstatisme est donc de 1. En effet, les efforts de 0 sur 1 suivant  $\vec{x}$  sont transmis par les deux liaisons à la fois. Il est donc impossible de déterminer la part de chacune.



### Écriture des équations de cinématique

$$\left\{ \mathcal{V}_{1/0}^A \right\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_A \cdot \vec{x} + \beta_A \cdot \vec{y} + \gamma_A \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ et } \left\{ \mathcal{V}_{1/0}^B \right\}_B = \begin{Bmatrix} \alpha_B \cdot \vec{x} + \beta_B \cdot \vec{y} + \gamma_B \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Les liaisons sont en parallèle donc :  $\left\{ \mathcal{V}_{1/0}^A \right\} = \left\{ \mathcal{V}_{1/0}^B \right\}$

$$\vec{V}_{A,1/0}^B = \vec{V}_{B,1/0}^B + \vec{\Omega}_{1/0}^B \wedge \vec{BA} = \vec{0} + (\alpha_B \cdot \vec{x} + \beta_B \cdot \vec{y} + \gamma_B \cdot \vec{z}) \wedge (-L \cdot \vec{x}) = L \cdot (\beta_B \cdot \vec{z} - \gamma_B \cdot \vec{y})$$

D'où le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \alpha_A = \alpha_B & \longrightarrow \text{ne peut être résolu : mobilité} \\ \beta_A = \beta_B \\ \gamma_A = \gamma_B \\ 0 = 0 & \longrightarrow \text{équation trivialement vérifiée : hyperstatisme} \\ L \cdot \gamma_B = 0 \\ -L \cdot \beta_B = 0 \end{cases}$$

—  $I_c = 6$  inconnues dont  $m = 1$  doit être imposée pour résoudre.

— 6 équations dont  $h = 1$  trivialement vérifiée.

Soit :  $I_c - m = 6 - h$

### Écriture des équations statiques

$$\left\{ \mathcal{T}_{1/0}^A \right\}_A = \begin{Bmatrix} X_A \cdot \vec{x} + Y_A \cdot \vec{y} + Z_A \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ et } \left\{ \mathcal{T}_{1/0}^B \right\}_B = \begin{Bmatrix} X_B \cdot \vec{x} + Y_B \cdot \vec{y} + Z_B \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$$

Les liaisons sont en parallèle donc si  $\{\mathcal{T}_{1/0}\} = \underset{A}{\left\{ \begin{array}{c} X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ \vec{0} \end{array} \right\}}$  est l'action globale de 1 sur 0 connue (imposée) et compatible avec la liaison, alors :

$$\{\mathcal{T}_{1/0}^A\} + \{\mathcal{T}_{1/0}^B\} = \{\mathcal{T}_{1/0}\}$$

$$M_{A,1/0}^B = \vec{M}_{B,1/0}^B + \vec{R}_{1/0}^B \wedge \vec{B}A = \vec{0} + (X_B.\vec{x} + Y_B.\vec{y} + Z_B.\vec{z}) \wedge (-L.\vec{x}) = L.(Y_B.\vec{z} - Z_B.\vec{y})$$

D'où le système d'équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} X_A + X_B = X \quad \longrightarrow \text{ne peut être résolu : hyperstatisme} \\ Y_A + Y_B = Y \\ Z_A + Z_B = Z \\ 0 = 0 \quad \longrightarrow \text{équation trivialement vérifiée : mobilité} \\ -L.Z_B = 0 \\ L.Y_B = 0 \end{array} \right.$$

—  $I_s = 6$  inconnues dont  $h = 1$  doit être imposée pour résoudre.

— 6 équations dont  $m = 1$  trivialement vérifiée.

Soit :  $I_c - m = 6 - h$

## 2.5 Méthode pour identifier une liaison équivalente à une association parallèle

Ce paragraphe se veut plus pragmatique au regard des épreuves des concours. Il peut vous être demandé de « déterminer la liaison équivalente à l'association parallèle » de telle et telle liaison, ou encore « identifier la liaison équivalente... ».

Identifier une liaison équivalente à une association parallèle consiste à trouver *une unique liaison* dont les mouvements et efforts transmissibles sont *identiques* à l'association des deux liaisons en parallèle. Il suffit de vérifier la propriété sur les mouvements pour avoir celle sur les efforts et inversement.

Pour répondre à ce type de question, deux possibilités s'offrent à vous :

- proposer une analyse qualitative des mouvements autorisés ou des actions mécaniques transmissibles et en déduire la liaison équivalente ;
- proposer un calcul débouchant sur le torseur cinématique ou statique de la liaison équivalente et en déduire son type.

Les deux méthodes sont pertinentes mais la première sera parfois jugée insuffisante par certain correcteur qui attendent un calcul et la seconde sera parfois très lourde à mener ce qui va conduire à perdre un temps précieux (surtout si la première méthode est jugée suffisante). À vous d'évaluer, en fonction de la formulation de la question et du déroulement des questions, si le jury attend un calcul ou une analyse mécanique.

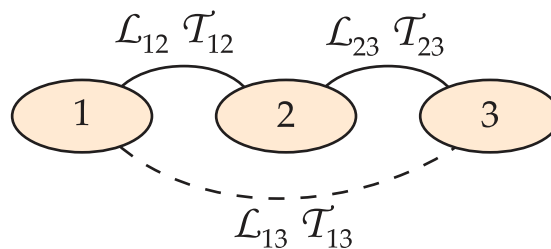
À titre d'exemple, sur le cas de l'association parallèle des deux liaisons rotules, la première méthode consiste à dire : « La liaison rotule en A autorise toutes les rotations autour de A et interdit toute translation du point A. La liaison en B autorise toute les rotations autour de B et interdit les translations du point B. Aussi, le seul mouvement *compatible* avec les deux liaisons en parallèle est la rotation suivant l'axe (AB). La liaison équivalente est donc une liaison pivot d'axe (AB). ». Ou encore, dans une formulation plus mathématisée : « L'espace vectoriel cinématique de la liaison en A a pour base les trois rotations autour du point A. L'espace vectoriel cinématique de la liaison en B a pour base les trois rotations autour du point B. L'espace vectoriel cinématique de la liaison équivalente est *l'intersection* des deux espaces associés aux deux liaisons, et a donc pour base une unique

rotation autour de la droite  $(AB)$ . La liaison équivalente est donc une liaison pivot d'axe  $(AB)$ . ».

La seconde méthode consiste à réaliser le calcul torsorien développé au paragraphe précédent, soit d'un point de vue cinématique, soit d'un point de vue statique (pas les deux...). Sur l'exemple précédent, il a fallu écrire les torseurs, déplacer l'un des deux, puis traduire un système d'équations, ce qui est plus lourd que la première méthode (mais irréprochable...).

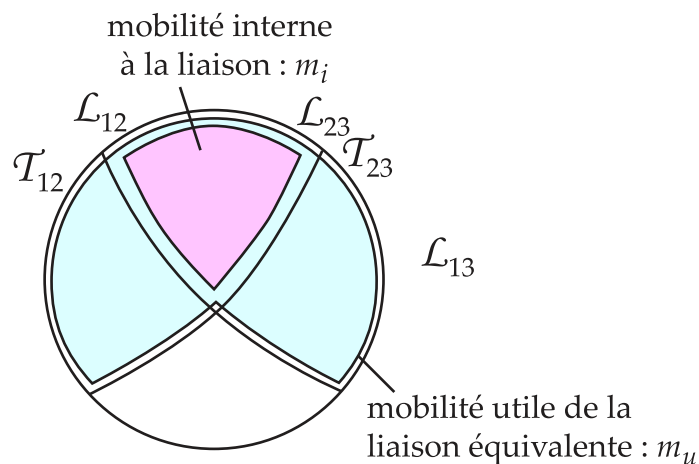
*Mon conseil* : sauf si le calcul est trivial (c'est le cas lorsqu'il n'y a pas de déplacement de torseur à réaliser), préférer la première méthode et si vous terminez le sujet en avance, vous pourrez revenir à la question pour développer la méthode calculatoire.

### 3 Association de deux liaisons en série



$\mathcal{L}_{13}$  la liaison équivalente à l'association en série de  $\mathcal{L}_{12}$  et  $\mathcal{L}_{23}$ . La composition des vitesses impose  $\{\mathcal{V}_{3/1}\} = \{\mathcal{V}_{3/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/1}\}$  donc  $\mathcal{L}_{13} = \mathcal{L}_{12} + \mathcal{L}_{23}$ .  $\mathcal{T}_{13}$  est l'orthogonale de  $\mathcal{L}_{13}$  donc  $\mathcal{T}_{13} = \mathcal{T}_{12} \cap \mathcal{T}_{23}$ .

#### 3.1 Relations liant mobilité et nombre d'inconnues



—  $\dim \mathcal{L}_{13} = (\dim \mathcal{L}_{12} + \dim \mathcal{L}_{23}) - \dim(\mathcal{L}_{12} \cap \mathcal{L}_{23})$

On note  $m_u$  la *mobilité utile* correspondant au nombre de degrés de liberté de la liaison équivalente  $\mathcal{L}_{13}$  :

$m_u = \dim \mathcal{L}_{13}$ .

On note  $m_i$  la *mobilité interne* correspondant au nombre de degrés de liberté laissés libre lorsque  $\{\mathcal{V}_{3/1}\}$  est imposé :  $m_u = \dim(\mathcal{L}_{12} \cap \mathcal{L}_{23})$ .

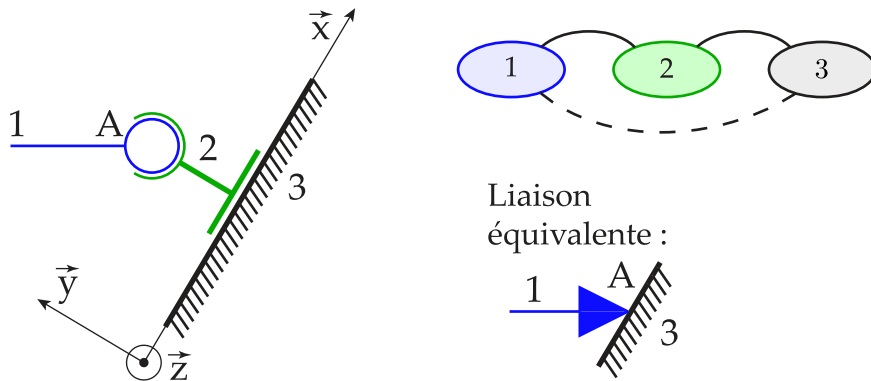
On obtient alors la relation :  $m_u = I_c - m_i$ .

où  $I_c$  est le nombre d'inconnues cinématiques des torseurs  $\{\mathcal{V}_{3/2}\}$  et  $\{\mathcal{V}_{2/1}\}$ .

$$\begin{cases} \dim \mathcal{L}_{12} = 6 - \dim \mathcal{T}_{12} \\ \dim \mathcal{L}_{13} = 6 - \dim \mathcal{T}_{13} \end{cases} \implies I_c = 2 \times 6 - I_s$$

d'où :  $m_u + m_i = 2 \times 6 - I_s$

### 3.2 Exemple : liaison ponctuelle réalisée par une rotule et un appui-plan



—  $m_u = 5$  mobilités utiles (liaison ponctuelle entre 1 et 3).

—  $I_c = 3 + 3$  inconnues cinématiques.

On en déduit :  $m_i = 6 - 5 = 1$  rotation de 2 autour de  $(A, \vec{y})$  non imposée par  $\{\mathcal{V}_{1/3}\}$ .

#### Écriture des équations de cinématique

$$\{\mathcal{V}_{1/2}\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha_{12} \cdot \vec{x} + \beta_{12} \cdot \vec{y} + \gamma_{12} \cdot \vec{z} \\ \vec{0} \end{Bmatrix} \text{ et } \{\mathcal{V}_{2/3}\}_A = \begin{Bmatrix} \beta_{23} \cdot \vec{y} \\ U_{23} \cdot \vec{x} + W_{23} \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}$$

Les liaisons sont en série donc si  $\{\mathcal{V}_{1/3}\}_A = \begin{Bmatrix} \alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y} + \gamma \cdot \vec{z} \\ U \cdot \vec{x} + W \cdot \vec{z} \end{Bmatrix}$  est connu (imposé) et compatible avec

la liaison, alors :

$$\{\mathcal{V}_{1/2}\} + \{\mathcal{V}_{2/3}\} = \{\mathcal{V}_{1/3}\}$$

D'où le système d'équation :

$$\begin{cases} \alpha_{12} = \alpha \\ \beta_{12} + \beta_{23} = \beta \quad \longrightarrow \text{ne peut être résolu : mobilité interne} \\ \gamma_{12} = \gamma \\ U_{23} = U \\ 0 = 0 \quad \longrightarrow \text{équation trivialement vérifiée : immobilité de 1/3} \\ W_{23} = W \end{cases}$$

—  $I_c = 6$  inconnues dont  $m_i = 1$  doit être imposée pour résoudre.

—  $m_u = 5$  équations.

Soit :  $m_u = I_c - m_i$

#### Écriture des équations de statique

En imposant  $\{\mathcal{T}_{\text{ext}/1}\}$  compatible avec la liaison :  $\{\mathcal{T}_{\text{ext}/1}\}_A = \begin{Bmatrix} Y \cdot \vec{y} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}$ .

On isole 1 puis 2 (3 est le bâti) :

$$\left\{ \begin{array}{l} -X_{12} + 0 = 0 \\ -Y_{12} + Y = 0 \\ -Z_{12} + 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} X_{12} + 0 = 0 \\ Y_{12} + Y_{23} = 0 \\ Z_{12} + 0 = 0 \\ 0 - L_{23} = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 - N_{23} = 0 \end{array} \right.$$

—  $2 \times 6$  équations

—  $I_s = 3 + 3$  inconnues

—  $m_u + m_i = 5 + 1$  mobilités conduisant à des équations triviales

Soit  $I_s = 2 \times 6 - (m_u + m_i)$

### 3.3 Méthode pour identifier une liaison équivalente à une association série

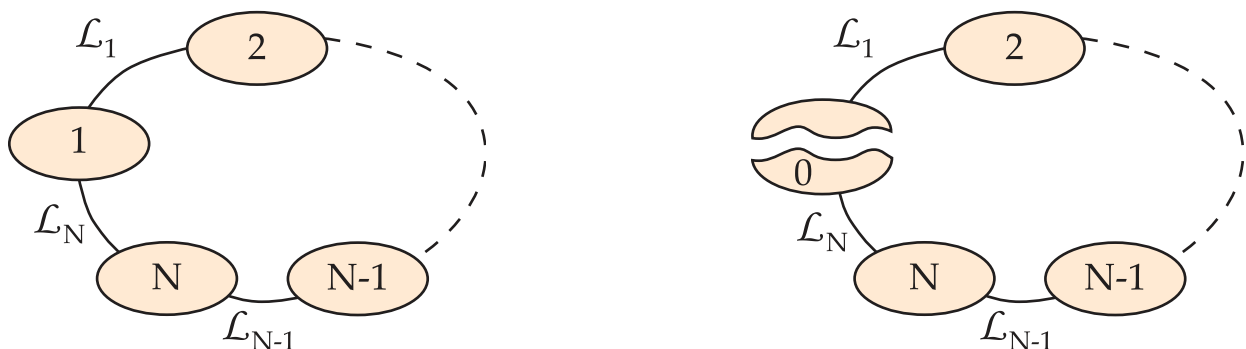
Comme pour l'association parallèle, deux méthodes s'offrent à vous pour déterminer la liaison équivalente à une association série.

Sur l'exemple précédent, la première méthode consisterait à dire « La liaison rotule autorise toutes les rotations autour de  $A$ . La liaison appui-plan autorise les translations dans le plan et la rotation normale au plan. La liaison équivalente à l'association série bénéficie du cumul des mouvements autorisés, soit 3 rotations autour de  $A$  et 2 translations dans le plan. La liaison équivalente est donc une liaison ponctuelle de centre  $A$  et de normale  $\vec{y}$ . ». Ou encore, dans une formulation plus mathématisée : « L'espace vectoriel cinématique de la liaison 1-2 a pour base les trois rotations autour du point  $A$ . L'espace vectoriel cinématique de la liaison 2-3 a pour base une rotation suivant  $\vec{y}$  et deux translations suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ . L'espace vectoriel cinématique de la liaison équivalente est la somme des deux espaces associés aux deux liaisons, et a donc pour base trois rotations autour de  $A$  et deux translations suivant  $\vec{x}$  et  $\vec{z}$ . La liaison équivalente est donc une liaison ponctuelle de centre  $A$  et de normale  $\vec{y}$ . ».

La seconde méthode consiste à développer le calcul cinématique du paragraphe précédent. Si la liaison appui-plan est exprimée en  $A$ , il n'y a pas de déplacement de torseur et le calcul est à peine plus long que la formulation qualitative (ce n'est pas toujours le cas).

## 4 Analyse d'une chaîne bouclée

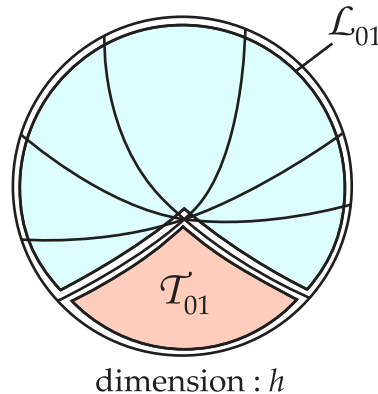
Soit une chaîne bouclée de  $N$  solides numérotés de 1 à  $N$ . On découpe virtuellement le solide 1 en deux solides 0 et 1.





On s'intéresse aux mouvements possibles de 0 par rapport à 1, autorisés par la boucle.

$$\mathcal{L}_{01} = \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_i \text{ et } \mathcal{T}_{01} = \bigcap_{i=1}^N \mathcal{T}_i$$



Les mouvements déjà interdits par la boucle seront en concurrence avec l'encastrement 0-1 et conduisent à de l'hyperstatisme.

$$h = \dim \mathcal{T}_{01} = \dim \bigcap_{i=1}^N \mathcal{T}_i$$

On en déduit :  $6 = \dim \mathcal{T}_{01} = \dim \mathcal{L}_{01} = \sum_{i=1}^N (\dim \mathcal{L}_i) - \sum_{i=1; j>i}^N \dim(\mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j)$ , soit :

$$6 - h = I_c - m$$

Sachant que pour chaque liaison,  $\dim \mathcal{T}_i + \dim \mathcal{L}_i = 6$ , on en déduit :

$$h = m - 6.(N - 1) + I_s$$

### Système d'équations cinématiques

La fermeture cinématique de la boucle s'écrit :  $\{\mathcal{V}_{N/1}\} = \{\mathcal{V}_{N/N-1}\} + \dots + \{\mathcal{V}_{2/1}\}$

- 6 équations dont  $h$  seront trivialement vérifiées,
- $I_c$  inconnues dont  $m$  doivent être imposées pour résoudre.

Soit :  $6 - h = I_c - m$

### Système d'équations statiques

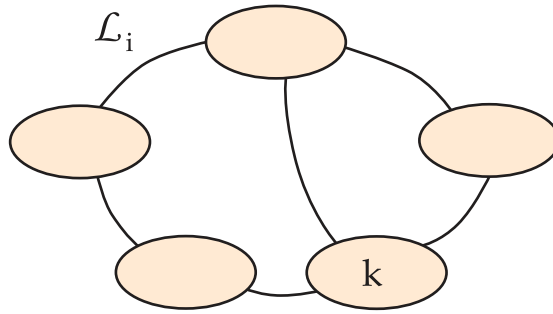
Le PFD appliqué à 2 puis 3 puis ... puis  $N$  (1 est le bâti) conduit à :

- $6 \times (N - 1)$  équations dont  $m$  seront trivialement vérifiées,
- $I_s$  inconnues dont  $h$  doivent être imposées pour résoudre

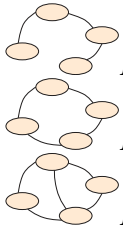
Soit :  $6.(N - 1) - m = I_s - h$

## 5 Analyse d'un système complexe

Soient  $S$  solides liés par  $N$  liaisons.



### 5.1 Nombre cyclomatique



$N = S - 1$  liaisons entre  $S$  solides  $\implies$  Chaîne ouverte.

$N = S$  liaisons entre  $S$  solides  $\implies$  Chaîne bouclée.

$N = S + 1$  liaisons entre  $S$  solides  $\implies$  Chaîne à 2 boucles indépendantes.

On appelle *nombre cyclomatique*  $n$  le nombre de boucles indépendantes dans le mécanisme :

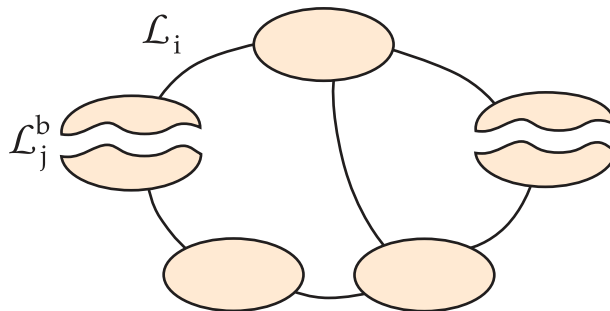
$$n = N - S + 1$$

À SAVOIR

### 5.2 Relation entre mobilité, hyperstatisme et nombres d'inconnues dans le cas général

Les  $n$  boucles vont introduire des relations de bouclage.

Soient  $\mathcal{L}_j^b$  les  $n$  coupures fictives de solides et  $\mathcal{L}_i$  les  $N$  liaisons du mécanisme.



On admet la relation :  $\sum_{j=1}^n \mathcal{L}_j^b = \sum_{i=1}^N \mathcal{L}_i$  où les  $\mathcal{L}_j^b$  sont à intersection nulle deux à deux et de dimension 6 chacun (chaque  $\mathcal{L}_j^b$  correspond à un torseur de bouclage différent).

On en déduit la relation sur les dimensions :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \dim \mathcal{L}_j^b - 0 &= \sum_{i=1}^N \dim \mathcal{L}_i - \sum_{i=1; j>i}^N \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j \\ \implies 6.n - \sum_{j=1}^n \dim \mathcal{T}_j^b &= \sum_{i=1}^N \dim \mathcal{L}_i - \sum_{i=1; j>i}^N \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j \\ \implies &\boxed{6.n - h = I_c - m} \end{aligned}$$

Sachant que  $I_c + I_s = 6.N$ , on obtient :  $h = m + 6(n - N) + I_s$ , soit en utilisant la définition du nombre cyclomatique :

$$h = m - 6.(S - 1) + I_s$$

### 5.3 Système d'équations

Cinématique :

- $6 \times n$  équations dont  $h$  triviales,
- $I_c$  inconnues dont  $m$  sont à imposer pour résoudre.

Soit  $6.n - h = I_c - m$ .

Statique :

- $6 \times (S - 1)$  équations dont  $m$  triviales,
- $I_s$  inconnues dont  $h$  sont à imposer pour résoudre.

Soit :  $6 \times (S - 1) - m = I_s - h$ .

### 5.4 Identifier les contraintes géométriques de montage

Lorsqu'un modèle est hyperstatique, il convient de s'interroger sur la pertinence du modèle et parfois envisager de modifier le modèle pour qu'il devienne isostatique.

Un modèle hyperstatique peut relever :

- soit d'un modèle mal adapté pour représenter le réel qui lui-même ne présente pas de contraintes de montage : il faut alors corriger le modèle pour le rendre isostatique;
- soit d'un modèle adapté à un système réel qui présente effectivement des contraintes de montage.

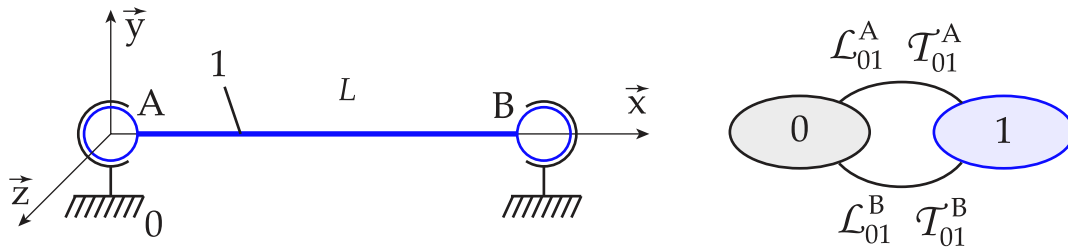
Dans le second cas, il n'est pas forcément judicieux de modifier le modèle. Néanmoins, avoir identifié la présence de contraintes de montage peut conduire à reconcevoir le système réel pour libérer ces contraintes. Pour déterminer les modifications à apporter, il faut identifier ces contraintes géométriques, en imaginant le montage du mécanisme "avec petits défauts géométriques", liaisons après liaisons, en identifiant quels assemblages peuvent devenir impossibles en présence de petits défauts. On retrouve alors des contraintes géométriques de distance ou d'angle à respecter pour pouvoir monter.

Si on ne modifie pas le modèle, le système d'équations de dynamique comportera plus d'inconnues que d'équations. Parfois les inconnus non calculables ne sont pas recherchés et les inconnues demandées peuvent être tout de même calculées. Si les inconnues hyperstatiques sont recherchées, il faut alors compléter le système d'équations, en général par des relations de comportement élastique de certains composants, modélisant les déformations des pièces ou des liaisons (cas rares en concours).

#### Exemple : liaison pivot réalisée par deux rotules

On reprend l'exemple utilisé en début de document. Avec 2 solides dont le bâti, on peut écrire 1 PFS, soit 6 équations, dont une sera trivialement vérifiée (système de rang 5) du fait de la mobilité ( $m = 1$ ). Or il y a 6 inconnues statiques (2 rotules) si bien que  $h = 1$ .

Cet hyperstatisme correspond à une contrainte de montage. Imaginons tout d'abord un défaut géométrique : une longueur  $AB$  différente sur le bâti 0 et sur l'arbre 1. Lorsque les deux liaisons rotules sont montées successivement, il n'y a aucune contrainte de montage sur la première rotule, mais lors du montage de la seconde, la différence de longueur va interdire le montage. Sauf à déformer les pièces : en forçant pour monter,



il va falloir déformer l'arbre (ou le bâti) élastiquement et un effort de précharge existera suivant  $\vec{x}$  dans les deux liaisons, même lorsqu'aucun effort n'est exercé sur l'arbre.

On a donc retrouvé la contrainte géométrique de montage (la longueur  $AB$ ) et les efforts non déterminables ( $X_A$  et  $X_B$ ) sauf à introduire une relation supplémentaire sur l'élasticité des pièces. Ces composantes statiques sont susceptible de présenter des précharges en fonction de la qualité de fabrication des pièces.

En pratique, ces contraintes géométriques font l'objet d'une attention particulière à la conception. Le plus souvent, un « jeu fonctionnel » est prévu, qui donne lieu à des spécifications sur les tolérance de fabrication des pièces.

### 5.5 Remarque sur les problèmes plans

Dans le cadre de la modélisation plane,  $\dim T = 3$ . Les développements précédents restent valables et on obtient les relations :

Relation cinématique :

$$3.n - h = I_c - m$$

Relation statique :

$$h = m - 3.(S - 1) + I_s$$

où  $I_c$  et  $I_s$  sont les nombres d'inconnues des torseurs cinématique et statique dans le cadre de la modélisation plane.

## Annexe : Illustration sur le compresseur de climatisation

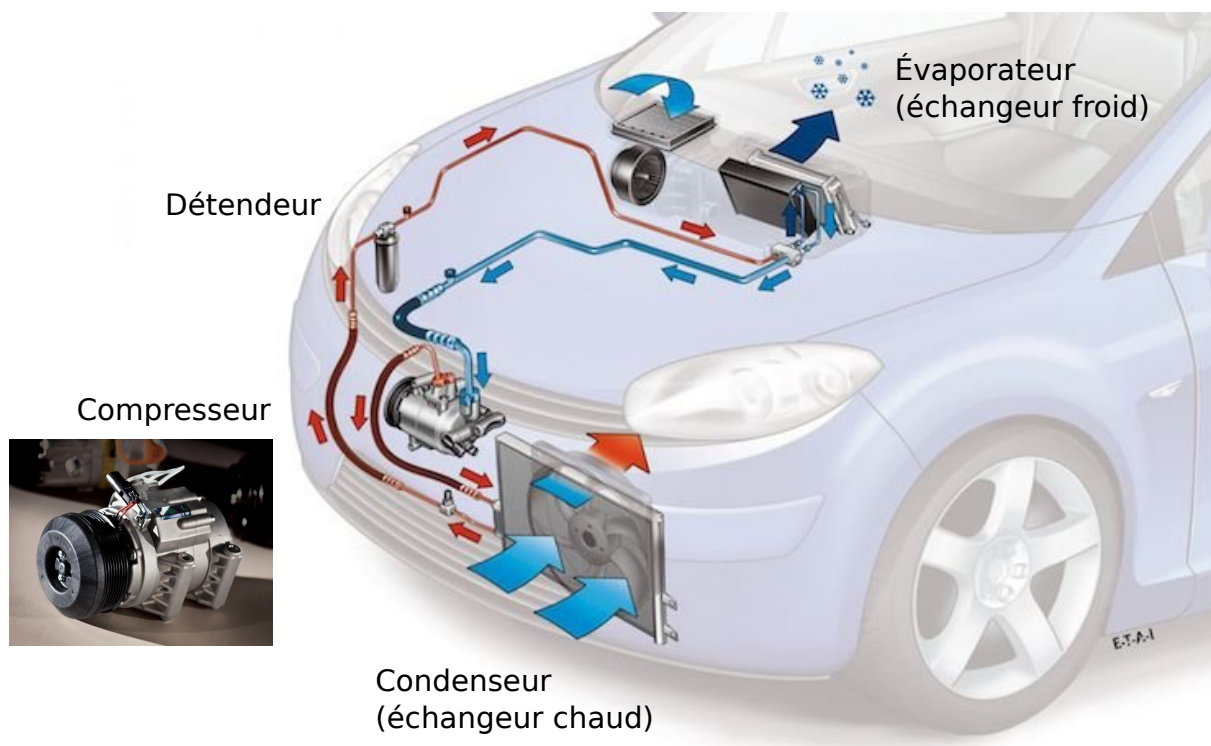


FIGURE 1 – Fonctionnement d'une climatisation et rôle du compresseur.

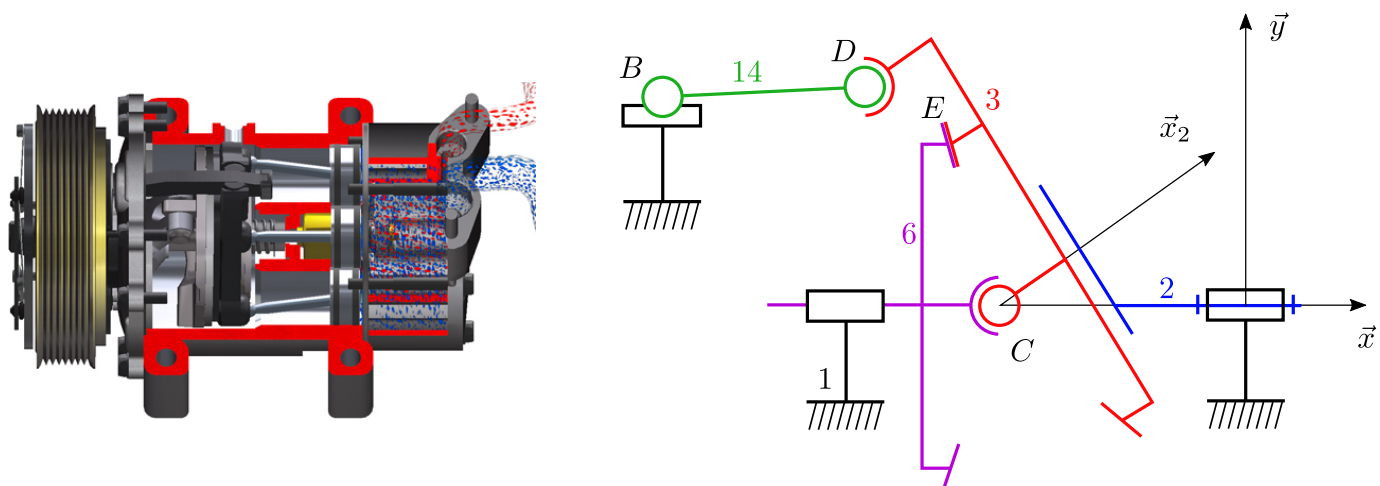


FIGURE 2 – Écorché et schéma cinématique du compresseur de climatisation.