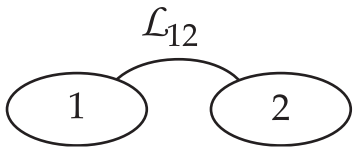
Théorie des Mécanismes

Objectifs du cours : Après avoir étudié ce cours, vous devez être capable de :
- déterminer si un problème de cinématique ou de statique/dynamique est soluble,
- critiquer le choix de modèles de mécanisme.

1 Liaisons et espaces vectoriels associés

1.1 Caractérisation cinématique d'une liaison



Soient deux solides 1 et 2 en liaison l'un avec l'autre. La liaison autorise m mouvements parmi les 6 mouvements possibles de 2 par rapport à 1. Le torseur $\left\{\mathcal{V}2/1\right\}$ est donc un élément d'un espace vectoriel $\mathcal{L}_{12}$ de dimension m, caractérisant l'ensemble des mouvements possible de 2 par rapport à 1.

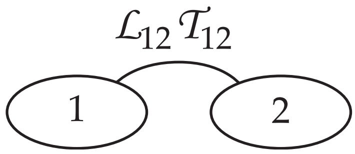
Exemple : liaison pivot d'axe $(A, \vec{x})$

$$\mathcal{L}_{12} = \left\{ \left\{\mathcal{V}2/1\right\} = {}_A\left\{ \begin{array}{c} \omega.\vec{x} \\ \vec{0} \end{array} \right\}, \omega \in \mathbb{R} \right\}$$

L'espace vectoriel $\mathcal{L}_{12}$ est de dimension 1.

$\mathcal{L}_{12}$ est un sous-espace de l'espace vectoriel des mouvements de corps rigide (espace des champs de torseurs T). m est la *mobilité* de la liaison.

1.2 Caractérisation statique d'une liaison



L'effort transmissible dans une liaison est défini par dualité vis-à-vis des mouvements autorisés.

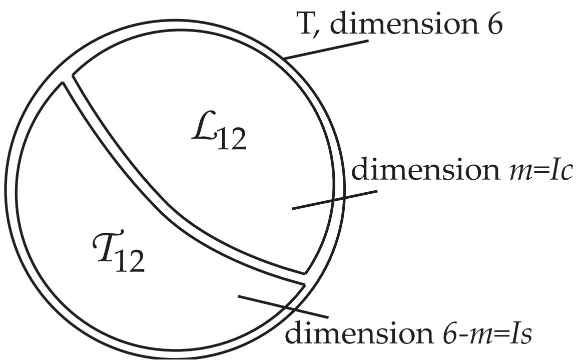
Pour une liaison parfaite, le torseur statique $\left\{\mathcal{T}1/2\right\}$ est tel que pour tout mouvement $\left\{\mathcal{V}2/1\right\}$, $\left\{\mathcal{T}1/2\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}2/1\right\} = 0$. Il appartient donc à un sous-espace vectoriel $\mathcal{T}_{12}$, caractérisant l'ensemble des actions mécaniques transmissibles entre 1 et 2 :

$$\mathcal{T}_{12} = \left\{ \left\{\mathcal{T}1/2\right\} \in T / \forall \left\{\mathcal{V}2/1\right\} \in \mathcal{L}_{12}, \left\{\mathcal{T}1/2\right\} \otimes \left\{\mathcal{V}2/1\right\} = 0 \right\}$$

C'est un sous-espace de l'espace des champs de torseur T, orthogonal à $\mathcal{L}_{12}$ et de dimension $6 - m$.

1.3 Interprétation graphique des espaces $\mathcal{L}_{12}$ et $\mathcal{T}_{12}$

$\mathcal{T}_{12}$ est l'orthogonal à $\mathcal{L}_{12}$ dans T. Les deux espaces peuvent donc se représenter comme indiqué sur la figure.



Une première relation sur les dimensions indique : $\dim \mathcal{L}_{12} + \dim \mathcal{T}_{12} = \dim T$ où $\dim \mathcal{L}_{12} = m$ et $\dim T = 6$.

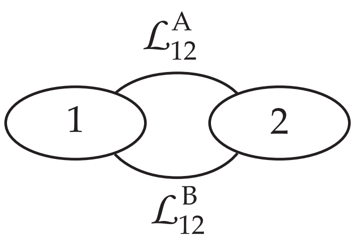
Si on note maintenant I_c le nombre d'inconnues cinématiques de la liaison ($I_c = \dim \mathcal{L}_{12}$) et I_s le nombre d'inconnues statiques de la liaison ($I_s = \dim \mathcal{T}_{12}$), on obtient la relation valable pour toutes les liaisons parfaites :

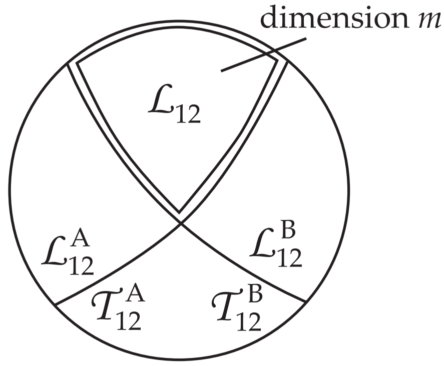
$$I_c + I_s = 6$$

2 Association de deux liaisons en parallèle

2.1 Point de vue cinématique

Soit $\mathcal{L}_{12}$ la liaison équivalente à l'association en parallèle de deux liaisons $\mathcal{L}_{12}^A$ et $\mathcal{L}_{12}^B$.

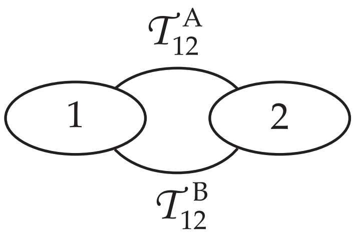


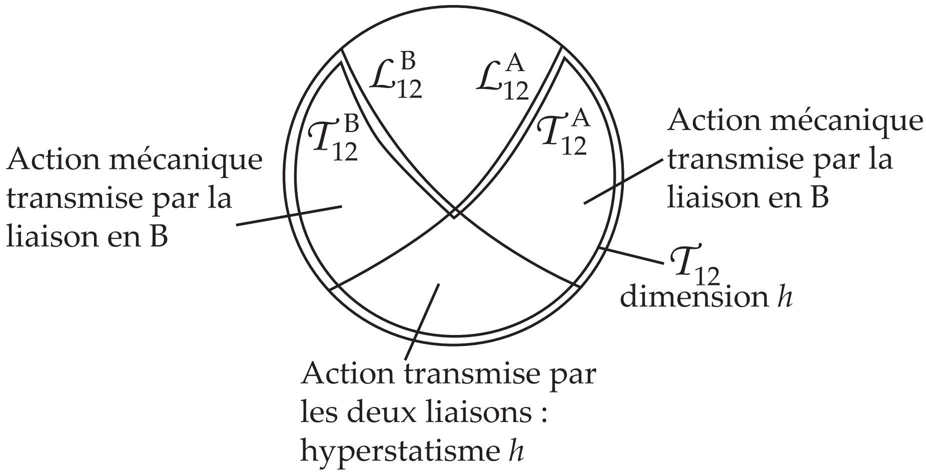


$\left\{\mathcal{V}2/1\right\} \in \mathcal{L}_{12}$ est donc à la fois un élément de $\mathcal{L}_{12}^A$ et $\mathcal{L}_{12}^B$. On en déduit l'égalité :

$$\mathcal{L}_{12} = \mathcal{L}_{12}^A \cap \mathcal{L}_{12}^B$$

Le nombre de mobilités autorisés entre 1 et 2 vaut : $m = \dim \mathcal{L}_{12} = \dim \mathcal{L}_{12}^A \cap \mathcal{L}_{12}^B$.





2.2 Point de vue statique

L'action mécanique résultante des deux actions mécaniques transmises par les deux liaisons vaut :

$$\left\{\mathcal{T}\,1/2\right\} = \left\{\mathcal{T}^{A}1/2\right\} + \left\{\mathcal{T}^{B}1/2\right\}$$

On en déduit : $\mathcal{T}_{12} = \mathcal{T}_{12}^{A} + \mathcal{T}_{12}^{B}$.

Connaissant $\left\{\mathcal{T}\,1/2\right\}$, il est possible de déterminer la part transmise par chaque liaison A et B, sauf pour les composantes communes de $\mathcal{T}_{12}^{A} \cap \mathcal{T}_{12}^{B}$.

Lorsque $\mathcal{T}_{12}^{A} \cap \mathcal{T}_{12}^{B} \neq \varnothing$, on dit que la liaison est *hyperstatique* de degré $h = \dim \mathcal{T}_{12}^{A} \cap \mathcal{T}_{12}^{B}$.

2.3 Relation liant mobilité, hyperstatisme et nombres d'inconnues

- $\mathcal{T}_{12}^{A} \cap \mathcal{T}_{12}^{B}$ est orthogonal à $\mathcal{L}_{12}^{A} + \mathcal{L}_{12}^{B}$ d'où :

$$\dim(\mathcal{T}_{12}^{A} \cap \mathcal{T}_{12}^{B}) = 6 - \dim(\mathcal{L}_{12}^{A} + \mathcal{L}_{12}^{B})$$

$$\iff h = 6 - (\dim \mathcal{L}_{12}^{A} + \dim \mathcal{L}_{12}^{B}) + \dim(\mathcal{L}_{12}^{A} \cap \mathcal{L}_{12}^{B})$$

$$\iff h = 6 - I_c + m$$

  où I_c est le nombre d'inconnues cinématiques des torseurs $\left\{\mathcal{V}^{A}2/1\right\}$ et $\left\{\mathcal{V}^{B}2/1\right\}$, et m la mobilité de la liaison $\mathcal{L}_{12}$.
- $\mathcal{T}_{12}$ est orthogonal à $\mathcal{L}_{12}$. Donc $\dim \mathcal{T}_{12} = 6 - \dim \mathcal{L}_{12}$. On en déduit :

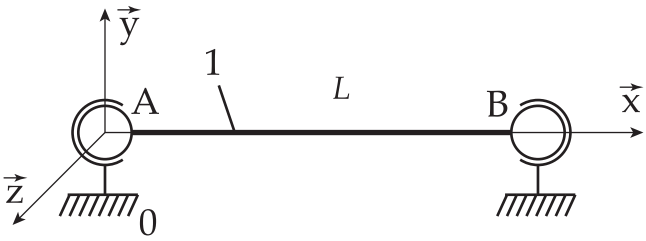
$$(\dim \mathcal{T}_{12}^{A} + \dim \mathcal{T}_{12}^{B}) - \dim(\mathcal{T}_{12}^{A} \cap \mathcal{T}_{12}^{B}) = 6 - m$$

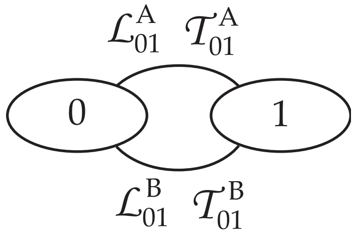
$$\iff N_s - h = 6 - m$$

  où N_s est le nombre d'inconnues statiques des torseurs $\left\{\mathcal{T}^{A}1/2\right\}$ et $\left\{\mathcal{T}^{B}1/2\right\}$, et h l'hyperstatisme de la liaison.

2.4 Exemple : liaison pivot réalisée à l'aide de deux liaisons rotules

On observe :
- $m = 1$: 1 mobilité autorisée (rotation suivant $(A, \vec{x})$.



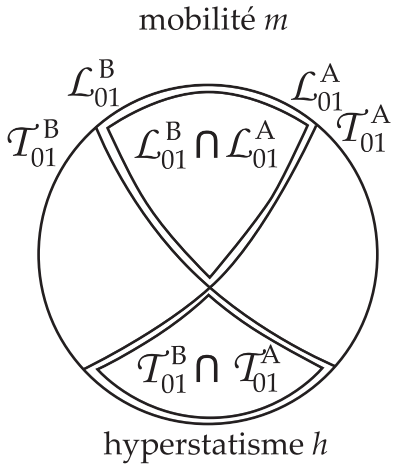


- $I_c = 2 \times 3$ (trois rotations pour chaque rotule)
- $I_s = 2 \times 3$ (trois efforts pour chaque rotule)

On en déduit :

- Par la relation cinématique : $h = 6 - I_c + m = 6 - 6 + 1 = 1$
- Par la relation statique : $h = I_s - 6 + m = 6 - 6 + 1 = 1$

Le degré d'hyperstatisme est donc de 1. En effet, les efforts de 0 sur 1 suivant $\vec{x}$ sont transmis par les deux liaisons à la fois. Il est donc impossible de déterminer la part de chacune.



Écriture des équations de cinématique

$$\left\{\mathcal{V}^{A}{}_{1/0}\right\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{c} \alpha_A.\vec{x} + \beta_A.\vec{y} + \gamma_A.\vec{z} \\ \vec{0} \end{array}\right\} \text{ et } \left\{\mathcal{V}^{B}{}_{1/0}\right\} = {}_{B}\left\{\begin{array}{c} \alpha_B.\vec{x} + \beta_B.\vec{y} + \gamma_B.\vec{z} \\ \vec{0} \end{array}\right\}$$

Les liaisons sont en parallèle donc : $\left\{\mathcal{V}^{A}{}_{1/0}\right\} = \left\{\mathcal{V}^{B}{}_{1/0}\right\}$

$\vec{V}^{B}_{A,1/0} = \vec{V}^{B}_{B,1/0} + \vec{\Omega}^{B}_{1/0} \wedge \vec{BA} = \vec{0} + (\alpha_B.\vec{x} + \beta_B.\vec{y} + \gamma_B.\vec{z}) \wedge (-L.\vec{x}) = L.(\beta_B.\vec{z} - \gamma_B.\vec{y})$

D'où le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \alpha_A = \alpha_B & \longrightarrow \text{ne peut être résolu : mobilité} \\ \beta_A = \beta_B & \\ \gamma_A = \gamma_B & \\ 0 = 0 & \longrightarrow \text{équation trivialement vérifiée : hyperstatisme} \\ L.\gamma_B = 0 & \\ -L.\beta_B = 0 & \end{cases}$$

- $I_c = 6$ inconnues dont $m = 1$ doit être imposée pour résoudre.
- 6 équations dont $h = 1$ trivialement vérifiée.

Soit : $I_c - m = 6 - h$

Écriture des équations statiques

$\left\{\mathcal{T}^{A}{}_{1/0}\right\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{c} X_A.\vec{x} + Y_A.\vec{y} + Z_A.\vec{z} \\ \vec{0} \end{array}\right\}$ et $\left\{\mathcal{T}^{B}{}_{1/0}\right\} = {}_{B}\left\{\begin{array}{c} X_B.\vec{x} + Y_B.\vec{y} + Z_B.\vec{z} \\ \vec{0} \end{array}\right\}$

Les liaisons sont en parallèle donc si $\left\{\mathcal{T}_{1/0}\right\} = {}_{A}\left\{\begin{array}{c} X.\vec{x} + Y.\vec{y} + Z.\vec{z} \\ \vec{0} \end{array}\right\}$ est l'action globale de 1 sur 0 connue (imposée) et compatible avec la liaison, alors :

$$\left\{\mathcal{T}^{A}{}_{1/0}\right\} + \left\{\mathcal{T}^{B}{}_{1/0}\right\} = \left\{\mathcal{T}_{1/0}\right\}$$

$M^{B}_{A,1/0} = \vec{M}^{B}_{B,1/0} + \vec{R}^{B}_{1/0} \wedge \vec{BA} = \vec{0} + (X_B.\vec{x} + Y_B.\vec{y} + Z_B.\vec{z}) \wedge (-L.\vec{x}) = L.(Y_B.\vec{z} - Z_B.\vec{y})$

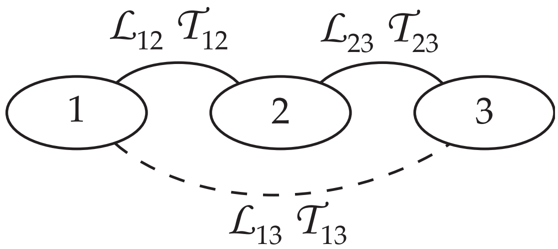
D'où le système d'équations :

$$\begin{cases} X_A + X_B = X \quad \longrightarrow \text{ne peut être résolu : hyperstatisme} \\ Y_A + Y_B = Y \\ Z_A + Z_B = Z \\ 0 = 0 \quad \longrightarrow \text{équation trivialement vérifiée : mobilité} \\ -L.Z_B = 0 \\ L.Y_B = 0 \end{cases}$$

- $I_s = 6$ inconnues dont $h = 1$ doit être imposée pour résoudre.
- 6 équations dont $m = 1$ trivialement vérifiée.

Soit : $I_c - m = 6 - h$

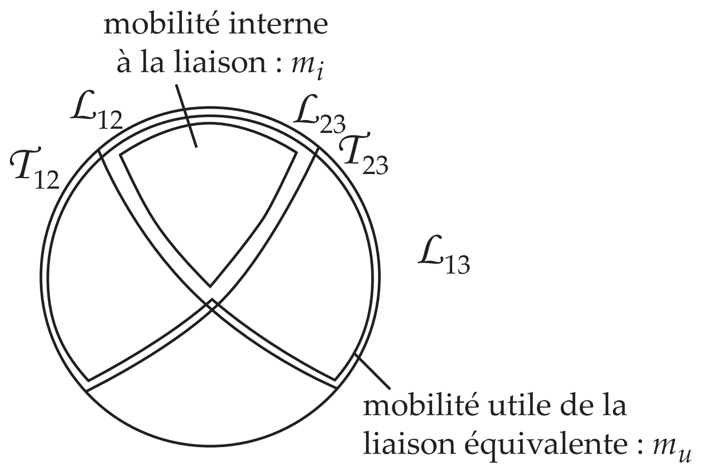
3 Association de deux liaisons en série



$\mathcal{L}_{13}$ la liaison équivalente à l'association en série de $\mathcal{L}_{12}$ et $\mathcal{L}_{23}$. La composition des vitesses impose $\left\{\mathcal{V}_{3/1}\right\} = \left\{\mathcal{V}_{3/2}\right\} + \left\{\mathcal{V}_{2/1}\right\}$ donc $\mathcal{L}_{13} = \mathcal{L}_{12} + \mathcal{L}_{23}$. $\mathcal{T}_{13}$ est l'orthogonale de $\mathcal{L}_{13}$ donc $\mathcal{T}_{13} = \mathcal{T}_{12} \cap \mathcal{T}_{23}$.

3.1 Relations liant mobilité et nombre d'inconnues

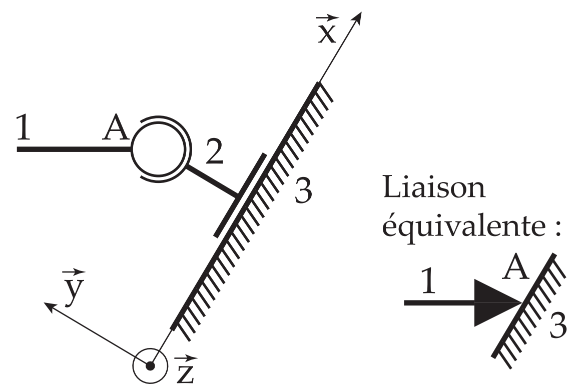
- $\dim \mathcal{L}_{13} = (\dim \mathcal{L}_{12} + \dim \mathcal{L}_{23}) - \dim(\mathcal{L}_{12} \cap \mathcal{L}_{23})$
  On note m_u la *mobilité utile* correspondant au nombre de degrés de liberté de la liaison équivalente $\mathcal{L}_{13}$: $m_u = \dim \mathcal{L}_{13}$.



On note m_i la *mobilité interne* correspondant au nombre de degrés de liberté laissés libre lorsque $\left\{\mathcal{V}3/1\right\}$ est imposé : $m_u = \dim(\mathcal{L}_{12} \cap \mathcal{L}_{23})$.
On obtient alors la relation : $m_u = I_c - m_i$.
où I_c est le nombre d'inconnues cinématiques des torseurs $\left\{\mathcal{V}3/2\right\}$ et $\left\{\mathcal{V}2/1\right\}$.

– $\left\{\begin{array}{l} \dim \mathcal{L}_{12} = 6 - \dim \mathcal{T}_{12} \\ \dim \mathcal{L}_{13} = 6 - \dim \mathcal{T}_{13} \end{array}\right. \Longrightarrow I_c = 2 \times 6 - I_s$
d'où : $m_u + m_i = 2 \times 6 - I_s$

3.2 Exemple : liaison ponctuelle réalisée par une rotule et un appui-plan



– $m_u = 5$ mobilités utiles (liaison pontuelle entre 1 et 3).
– $I_c = 3 + 3$ inconnues cinématiques.

On en déduit : $m_i = 6 - 5 = 1$ rotation de 2 autour de $(A, \vec{y})$ non imposée par $\left\{\mathcal{V}1/3\right\}$.

Écriture des équations de cinématique

$$\left\{\mathcal{V}1/2\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \alpha_{12}.\vec{x} + \beta_{12}.\vec{y} + \gamma_{12}.\vec{z} \\ \vec{0} \end{array}\right\} \text{ et } \left\{\mathcal{V}2/3\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \beta_{23}.\vec{y} \\ U_{23}.\vec{x} + W_{23}.\vec{z} \end{array}\right\}$$

Les liaisons sont en série donc si $\left\{\mathcal{V}1/3\right\} = {}_A\left\{\begin{array}{c} \alpha.\vec{x} + \beta.\vec{y} + \gamma.\vec{z} \\ U.\vec{x} + W.\vec{z} \end{array}\right\}$ est connu (imposé) et compatible avec la liaison, alors :

$$\left\{\mathcal{V}1/2\right\}+\left\{\mathcal{V}2/3\right\}=\left\{\mathcal{V}1/3\right\}$$

D'où le système d'équation :

$$\begin{cases} \alpha_{12}=\alpha \\ \beta_{12}+\beta_{23}=\beta \qquad \longrightarrow \text{ne peut être résolu : mobilité interne} \\ \gamma_{12}=\gamma \\ U_{23}=U \\ 0=0 \qquad \longrightarrow \text{équation trivialement vérifiée : immobilité de } 1/3 \\ W_{23}=W \end{cases}$$

- $I_c=6$ inconnues dont $m_i=1$ doit être imposée pour résoudre.
- $m_u=5$ équations.

Soit : $m_u=I_c-m_i$

Écriture des équations de statique

En imposant $\left\{\mathcal{T}\text{ext}/1\right\}$ compatible avec la liaison : $\left\{\mathcal{T}\text{ext}/1\right\}={}_A\left\{\begin{array}{c} Y.\vec{y} \\ \vec{0} \end{array}\right\}$.

On isole 1 puis 2 (3 est le bâti) :

$$\begin{cases} -X_{12}+0=0 \\ -Y_{12}+Y=0 \\ -Z_{12}+0=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \\ 0=0 \end{cases} \begin{array}{c} \longleftrightarrow \\ \\ \longleftrightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{cases} X_{12}+0=0 \\ Y_{12}+Y_{23}=0 \\ Z_{12}+0=0 \\ 0-L_{23}=0 \\ 0=0 \\ 0-N_{23}=0 \end{cases}$$

- 2×6 équations
- $I_s=3+3$ inconnues
- $m_u+m_i=5+1$ mobilités conduisant à des équations triviales

Soit $I_s=2\times 6-(m_u+m_i)$

4 Analyse d'une chaîne bouclée

Soit une chaîne bouclée de N solides numérotés de 1 à N. On découpe virtuellement le solide 1 en deux solides 0 et 1.

On s'intéresse aux mouvements possibles de 0 par rapport à 1, autorisés par la boucle.

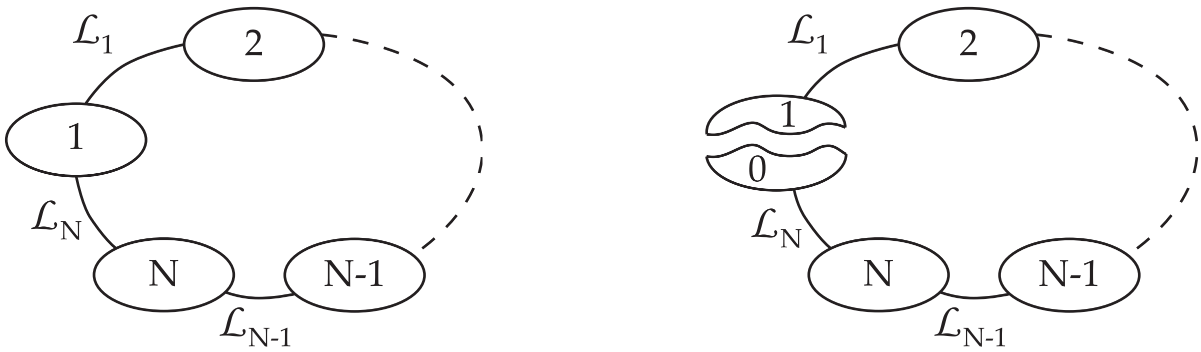
$\mathcal{L}_{01}=\sum_{i=1}^{N}\mathcal{L}_i$ et $\mathcal{T}_{01}=\bigcap_{i=1}^{N}\mathcal{T}_i$

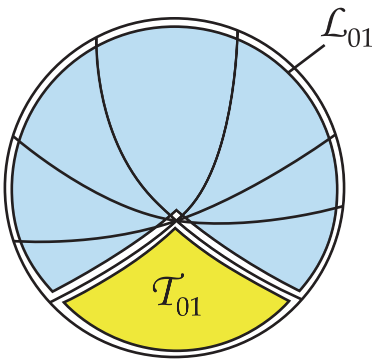
Les mouvements déjà interdits par la boucle seront en concurrence avec l'encastrement 0-1 et conduisent à de l'hyperstatisme.

$$h=\dim\mathcal{T}_{01}=\dim\bigcap_{i=1}^{N}\mathcal{T}_N$$

On en déduit : $6=\dim\mathcal{T}_{01}=\dim\mathcal{L}_{01}=\sum_{i=1}^{N}(\dim\mathcal{L}_i)-\sum_{i=1;j>i}^{N}\dim(\mathcal{L}_i\cap\mathcal{L}_j)$, soit :

$$6-h=I_c-m$$





dimension : h

Sachant que pour chaque liaison, $\dim \mathcal{T}_i + \dim \mathcal{L}_i = 6$, on en déduit :

$$h = m - 6.(N-1) + I_s$$

Système d'équations cinématiques

La fermeture cinématique de la boucle s'écrit : $\left\{\mathcal{V}\text{N/1}\right\} = \left\{\mathcal{V}\text{N/N-1}\right\} + ... + \left\{\mathcal{V}\text{2/1}\right\}$

- 6 équations dont h seront trivialement vérifiées,
- I_c inconnues dont m doivent être imposées pour résoudre.

Soit : $6 - h = I_c - m$

Système d'équations statiques

Le PFD appliqué à 2 puis 3 puis ... puis N (1 est le bâti) conduit à :

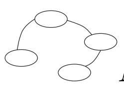
- $6 \times (N-1)$ équations dont m seront trivialement vérifiées,
- I_s inconnues dont h doivent être imposées pour résoudre

Soit : $6.(N-1) - m = I_s - h$

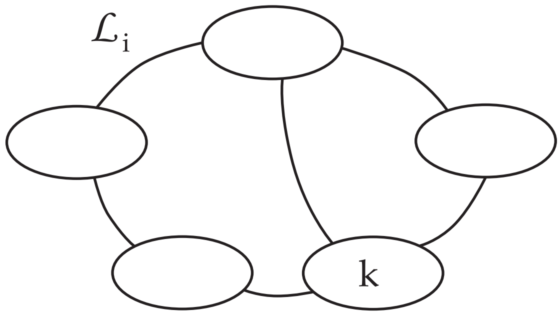
5 Analyse d'un système complexe

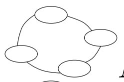
Soient S solides liés par N liaisons.

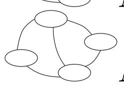
5.1 Nombre cyclomatique



$N = S - 1$ liaisons entre S solides $\Longrightarrow$ Chaîne ouverte.



 $N = S$ liaisons entre S solides $\Longrightarrow$ Chaîne bouclée.

 $N = S + 1$ liaisons entre S solides $\Longrightarrow$ Chaîne à 2 boucles indépendantes.

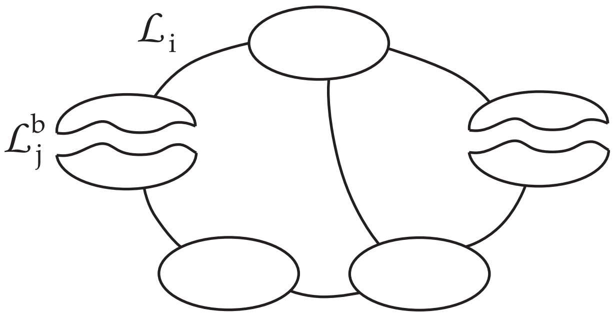
On appelle *nombre cyclomatique* n le nombre de boucles indépendantes dans le mécanisme :

$$\boxed{n = N - S + 1}$$

À SAVOIR

5.2 Relation entre mobilité, hyperstatisme et nombres d'inconnues dans le cas général

Les n boucles vont introduire des relations de bouclage.
Soient $\mathcal{L}_j^b$ les n coupures fictives de solides et $\mathcal{L}_i$ les N liaisons du mécanisme.



On admet la relation : $\sum_{j=1}^{n} \mathcal{L}_j^b = \sum_{i=1}^{N} \mathcal{L}_i$ où les $\mathcal{L}_j^b$ sont à intersection nulle deux à deux et de dimension 6 chacun (chaque $\mathcal{L}_j^b$ correspond à un torseur de bouclage différent).

On en déduit la relation sur les dimensions :

$$\sum_{j=1}^{n} \dim \mathcal{L}_j^b - 0 = \sum_{i=1}^{N} \dim \mathcal{L}_i - \sum_{i=1;j>i}^{N} \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j$$

$$\Longrightarrow 6.n - \sum_{j=1}^{n} \dim \mathcal{T}_j^b = \sum_{i=1}^{N} \dim \mathcal{L}_i - \sum_{i=1;j>i}^{N} \mathcal{L}_i \cap \mathcal{L}_j$$

$$\Longrightarrow \quad \boxed{6.n - h = I_c - m}$$

À SAVOIR

Sachant que $I_c + I_s = 6.N$, on obtient : $h = m + 6(n - N) + I_s$, soit en utilisant la définition du nombre cyclomatique :

$$\boxed{h = m - 6.(S - 1) + I_s}$$

À SAVOIR

5.3 Système d'équations

Cinématique :

- $6 \times n$ équations dont h triviales,
- I_c inconnues dont m sont à imposer pour résoudre.

Soit $6.n - h = I_c - m$.

Statique :

- $6 \times (S - 1)$ équations dont m triviales,
- I_s inconnues dont h sont à imposer pour résoudre.

Soit : $6 \times (S - 1) - m = I_s - h$.

5.4 Exemple

Exemple 1 : $n = 1$, $m = 1$, $S = 3$

$I_c = 3 \quad \Longrightarrow \quad h = 6.n + m - I_c = 4$ $I_s = 15 \quad \Longrightarrow \quad h = I_s - 6.(S - 1) + m = 4$

Contraintes à la fermeture de boucle :

- rotation autour de $\vec{y}$ et $\vec{z}$,
- translation suivant $\vec{z}$ et $\vec{y}$.

Exemple 2 : $n = 1$, $m = 0$, $S = 3$

($m = 0$ car $C \in$ cercle de centre A et $C \in$ cercle de centre B)

$I_c = 6 \quad \Longrightarrow \quad h = 6.n + m - I_c = 0$ $I_s = 12 \quad \Longrightarrow \quad h = I_s - 6.(S - 1) + m = 0$

5.5 Remarque sur les problèmes plans

Dans le cadre de la modélisation plane, $\dim T = 3$. Les développements précédents restent valables et on obtient les relations :

Relation cinématique :

$$\boxed{3.n - h = I_c - m}$$

Relation statique :

$$\boxed{h = m - 3.(S - 1) + I_s}$$

où I_c et I_s sont les nombres d'inconnues des torseurs cinématique et statique dans le cadre de la modélisation plane.