

Stabilité

1 Introduction

1.1 Définitions

La stabilité d'un système est une notion relativement intuitive. Il est cependant difficile d'en donner une définition précise. Plusieurs définitions de la stabilité peuvent être proposées.

Stabilité BIBO d'un système (Bounded Input - Bounded Output) :

Un système au repos est stable au sens BIBO si et seulement si pour toute entrée bornée, la sortie est bornée.

Cette définition relativement basique s'adapte parfaitement aux systèmes asservis linéaires. D'une part car elle inclue la notion d'entrée et de sortie et d'autre part car un système linéaire ne change pas de comportement selon sa situation.

Nous utiliserons donc cette définition de la stabilité dans le cadre du programme de CPGE. Elle atteint toutefois ses limites lorsqu'on aborde les systèmes non linéaires, qui peuvent être stables ou instables selon le point de fonctionnement.

Stabilité au sens de Lyapunov d'une position d'équilibre

Un état d'équilibre x_e est dit stable si $\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0$ tel que si $\|x(0) - x_e\| < \alpha$ alors $\|x(t) - x_e\| < \varepsilon, \forall t \geq 0$. Dans le cas contraire, x_e est dit instable.
 x_e est dit asymptotiquement stable si $\exists \alpha > 0$ tel que si $\|x(0) - x_e\| < \alpha$ alors $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = x_e$.

Cette définition caractérise la stabilité d'une position d'équilibre. Elle est plus complète que la définition précédente mais aussi plus complexe à mettre en œuvre : elle ne s'appuie pas sur les entrées et sorties du système mais sur son état. Elle est donc mieux adaptée à la *représentation d'état* des systèmes (vue en école d'ingénieurs). Elle peut néanmoins s'appliquer à une représentation de type entrée-sortie en utilisant l'énergie totale du système comme état.

1.2 Interprétation de la stabilité

La stabilité BIBO peut être illustrée par le système de direction d'un véhicule à vitesse élevée. Lorsque les roues directrices sont à l'avant du véhicule, une petite perturbation du volant va modifier la direction des roues mais l'inertie du véhicule va rapidement ramener les roues droites.

Au contraire, lorsque les roues directrices sont situées à l'arrière, l'inertie du véhicule va amplifier le mouvement de rotation des roues : un véhicule à direction arrière roulant trop vite est instable.

On considère ici la stabilité globale du système. La notion d'entrée et de sortie est clairement établie et l'analyse de la stabilité passe par une petite sollicitation (type Dirac) en entrée.

La stabilité au sens de Lyapunov peut être illustré par une bille soumise à la pesanteur, roulant dans un rail.

- A : position d'équilibre instable,
- B : position d'équilibre indifférent,
- C : position d'équilibre stable.

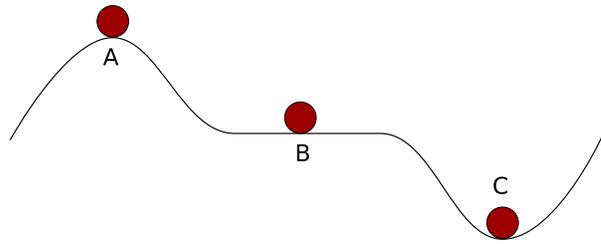


FIG. 1 – Interprétation de la notion de stabilité au sens de Lyapunov.

La bille est stable si, après avoir été écartée de la position d'équilibre, la sortie reste bornée. La stabilité dépend ici essentiellement de la position de la bille.

On distingue parfois :

- les systèmes *quasi-stables* dont la réponse reste bornée mais ne converge pas,
- les systèmes *stables* dont la réponse converge quand $t \rightarrow \infty$.

1.3 Perturbation de l'équilibre par une impulsion

Soit un système de fonction de transfert $H(p)$, de classe m , que l'on peut écrire sous forme factorisée :

$$H(p) = \frac{N(p)}{p^m \prod_k (p - p_k)}$$

Pour évaluer la stabilité du système au sens BIBO, celui-ci est perturbé par une entrée sous la forme d'un dirac unitaire : $e(t) = \delta(t)$, ou encore $E(p) = 1$. La sortie est alors égale à la fonction de transfert et se décompose en éléments simples sous la forme :

$$S(p) = H(p).E(p) = H(p) \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} s(t) = \sum_k \alpha_k \cdot t^l \cdot e^{p_k \cdot t} + \sum_{n=1}^m \beta_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$$

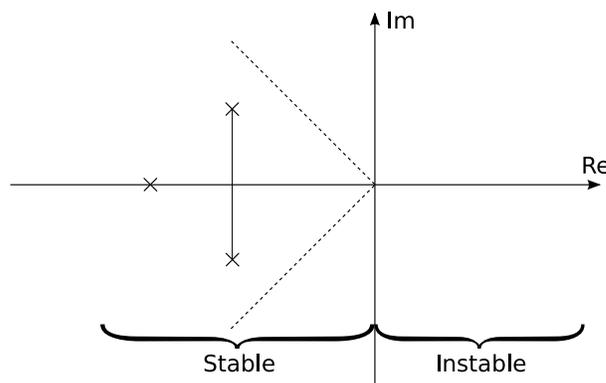


FIG. 2 – La position des pôles dans le plan complexe permet de conclure sur la stabilité.

$s(t)$ reste bornée si et seulement si tous les pôles p_k sont à partie réelle négative ou nulle et si la classe m est inférieur ou égale à 1 : $m \leq 1$.

Le *critère de Routh* permettra de déterminer s'il existe des pôles à partie réelle positive. Votre calculatrice peut aussi vous aider à calculer les pôles lorsque les coefficients sont exprimés numériquement et pas seulement littéralement.

Remarque: Un système n'est jamais parfaitement modélisé donc l'ingénieur doit s'assurer de la stabilité avec une certaine *marge*.

Si un pôle p_i est trop près de l'axe des imaginaires, il risque d'évoluer vers l'instabilité. Pour s'assurer d'une convergence rapide, on définit un temps maxi T_{max} et on place les pôles à gauche de l'axe $-3/T_{max}$.

De même, on évite des oscillations importantes pour la longévité du système, ce qui conduit à une partie réelle plus grande que la partie imaginaire : $|Re(p_i)| < |Im(p_i)|$.

La borne de gauche est généralement définie par les limites technologiques.

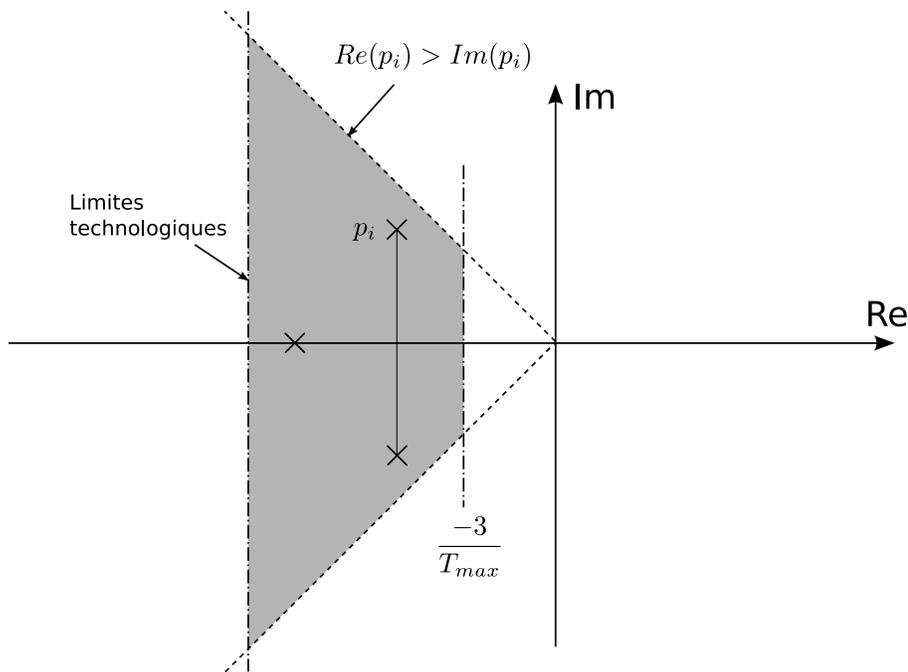


FIG. 3 – Localisation des pôles d'une fonction de transfert permettant de satisfaire à des conditions raisonnables de stabilité et de rapidité.

Pôle dominant : Les pôles dont la partie réelle est proche de l'axe des imaginaires sont les plus lents. Ils sont responsables de la majeure partie de l'écart avec la valeur à convergence. Ce sont les *pôles dominants*. Les pôles p_i dont la partie réelle est, en valeur absolue, très grande devant celle des pôles dominants peuvent alors être négligés.

2 Critère analytique : critère de Routh

Le critère de Routh est une technique mathématique permettant de déterminer si un polynôme présente des racines à partie réelle positive.

Il est en réalité peu intéressant pour l'ingénieur qui doit définir des marges de stabilité, ce que le critère de Routh ne permet pas. Un système stable mais en limite de stabilité sera considéré comme stable par le critère de Routh.

Méthode : Soit le polynôme $a_n.p^n + a_{n-1}.p^{n-1} + \dots + a_1.p + a_0$.

1. Si tous les coefficients ne sont pas du même signe ou si un des coefficients est nul, alors il existe un pôle à partie réelle positive ou nulle.
2. Si tous les coefficients sont non nuls et de même signe, construire le tableau de Routh :

p^n	a^n	a^{n-2}	a^{n-4}
p^{n-1}	a^{n-1}	a^{n-3}	a^{n-5}
p^{n-2}	b^{n-1}	b^{n-3}	b^{n-5}
p^{n-3}	c^{n-1}	c^{n-3}	
\vdots	\vdots	\vdots		
p^0	f^{n-1}			

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}.a_{n-2} - a_n.a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_{n-3} = \frac{a_{n-1}.a_{n-4} - a_n.a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$c_{n-1} = \frac{b_{n-1}.a_{n-3} - a_{n-1}.b_{n-3}}{b_{n-1}}$$

3. Appliquer le critère de Routh :

Toutes les racines du polynôme ont leur partie réelle négative si et seulement si tous les éléments de la première colonne de la table ont le même signe.

Si ce n'est pas le cas, le nombre de changement de signe correspond au nombre de racines à partie réelle positive.

Exemple : Soit le polynome $p^4 + 2.p^3 + 3.p^2 + 4.p + 5$. Le tableau de Routh s'écrit :

p^4	1	3	5	0	$\frac{2 \times 3 - 1 \times 4}{1} = 1$
p^3	2	4	0	0	$\frac{2 \times 5 - 1 \times 0}{2} = 5$
p^2	1	5	0		$\frac{1 \times 4 - 2 \times 5}{1} = -6$
p^1	-6	0			$\frac{-6 \times 5 - 1 \times 0}{-6} = 5$
p^0	5	0			

Il y a deux changements de signes donc deux pôles à partie réelle positive.

3 Critère graphique : critère du revers

3.1 FTBO et stabilité en boucle fermée

La stabilité en boucle fermée dépend directement du comportement de la boucle ouverte.

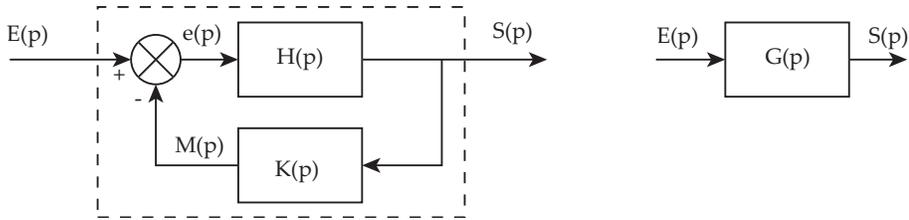


FIG. 4 – Schéma bloc d'un système asservi classique.

Considérons le système en boucle fermée classique figure 4. Notons $G(p)$ la fonction de transfert en boucle fermée.

$$G(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p).K(p)}$$

La fonction de transfert en boucle ouverte s'écrit $FTBO(p) = H(p).K(p)$ et l'équation caractéristique vaut donc : $1 + FTBO(p)$.

Lorsque la FTBO s'approche du point -1, le gain de la fonction de transfert en boucle fermée devient très grand, ce qui compromet la stabilité.

Les critères graphiques permettent de conclure sur la stabilité en boucle fermée en étudiant la position de la courbe décrite par la FTBO par rapport au point -1, appelé point critique.

Le programme de CPGE se limite au *critère du revers*, qui est une version simplifiée du critère de Nyquist, et valable uniquement pour les systèmes stables en boucle ouverte (c'est à dire que les pôles de la FTBO sont tous à partie réelle négative).

3.2 Diagramme de Black

3.2.1 Critère du revers

Critère du revers sur le diagramme de Black

Un système est stable en boucle fermée si et seulement si en décrivant le lieu de transfert en boucle ouverte dans le sens des pulsations ω croissantes, le point critique -1 est laissé à **droite** du lieu.

La figure 5 montre deux FTBO. L'une est stable car en la parcourant dans le sens des ω croissants, le point -1 est laissé sur la droite. L'autre est instable.

3.2.2 Marges de gain et de phase

Lorsque la FTBO est stable, elle l'est d'autant plus qu'elle passe loin du point -1, point critique de stabilité. Les marges de stabilités sont des mesures de la distance du lieu de transfert de la FTBO au point -1.

Marge de Gain

On appelle marge de gain la distance, exprimée en décibels, entre le lieu de transfert en boucle ouverte et le point critique mesuré parallèlement à l'axe du gain.

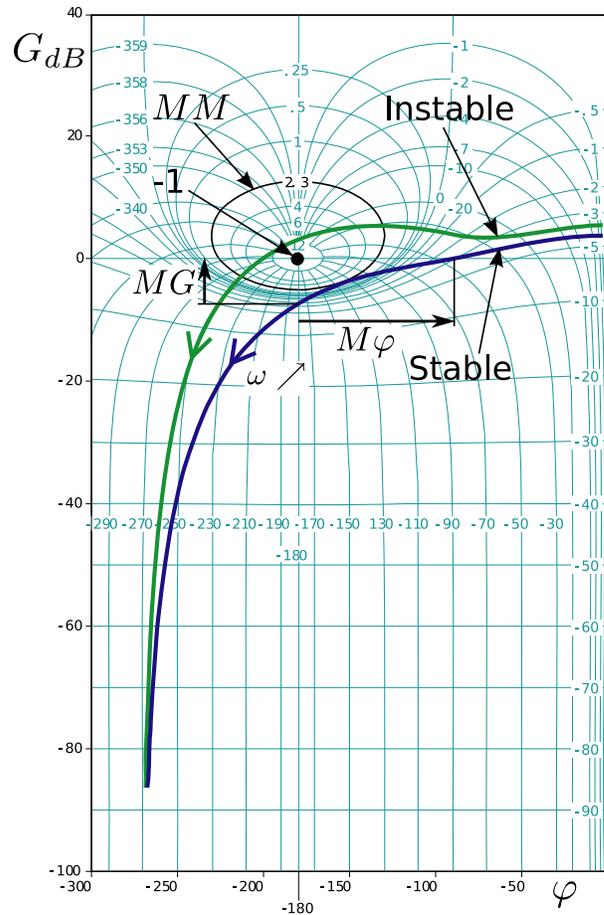


FIG. 5 – Lecture de la stabilité sur le diagramme de Black.

Marge de Phase

On appelle marge de phase la distance, exprimée en degrés, entre le lieu de transfert en boucle ouverte et le point critique mesuré parallèlement à l'axe de la phase.

Ordre de grandeur des marges :

- Marges de gain minimales : de l'ordre de 10 à 12 dB,
- Marges de phase minimales : de l'ordre de 45° à 50°.

Remarque : Pour les systèmes du premier et du second ordre, la marge de gain ne peut être définie puisque la phase n'atteint jamais la valeur de -180° . On parle alors de marge de gain *infinie*.

De même, si le gain statique de la FTBO est inférieur à 1, la marge de phase n'est pas définie.

3.2.3 Abaque de Black

L'abaque de Black permet de passer du diagramme de Bode en boucle ouverte au diagramme de Bode en boucle fermée à retour unitaire en réalisant la transformation :

$$H(p) \longrightarrow G(p) = \frac{H(p)}{1 + H(p)}$$

Il s'agit du faisceau de courbes tracé sur le fond du diagramme de Black.

Exemple : Soit la fonction de transfert $H(p) = \frac{K}{(1 + \tau \cdot p)(1 + \frac{2 \cdot \varepsilon}{\omega_0} p + \frac{p^2}{\omega_0^2})}$

Le document réponse présente le diagramme de Bode (en boucle ouverte) de cette fonction. Pour tracer le diagramme de Bode en boucle fermée ($G(p)$), répéter pour plusieurs fréquences les opérations suivantes :

1. pour une fréquence donnée, déterminer sur le diagramme de bode de $H(p)$ les valeurs du gain et de la phase.
2. reporter le point de coordonnées (gain, phase) sur le diagramme de Black en utilisant les axes des abscisses et ordonnées (échelles de gauche et du haut du diagramme).
3. déterminer le gain et la phase en boucle fermée à l'aide des courbes isophase et isomodule (échelles sur les courbes, ainsi qu'à droite et en bas).
4. Reporter ce point sur le diagramme de Bode, à la même fréquence, avec le nouveau module et nouvelle phase.

Remarque sur le tracé :

- Plus la FTBO s'approche du point critique, plus le pic de résonance est élevé.
- Il y a résonance si et seulement si la FTBO tangente une courbe isomodule.

3.2.4 Marge de module

La marge de module MM est le gain G_{dB} maximal de la FTBF. Elle est représentée par l'isomodule entourant le point critique à ne pas franchir par la FTBO sur le diagramme de Black (voir figure 5).

Sur le diagramme de Bode en boucle fermée, la marge de module représente une limite maximale pour la surtension.

3.3 Diagramme de Bode

Les marges de gain et de phase définies sur le diagramme de Black peuvent être mesurées sur le diagramme de Bode.

Le point -1 a pour gain $G_{dB} = 0$ et pour phase $\varphi = -180^\circ$.

La marge de phase se lit donc sur le diagramme de phase, à la pulsation à laquelle le gain vaut $G_{dB} = 0$. Il s'agit de la distance de la droite $\varphi = -180^\circ$ à la courbe.

De même, la marge de gain se lit sur le diagramme de gain, à la pulsation à laquelle la phase vaut $\varphi = -180^\circ$. Il s'agit de la distance de la courbe à la droite $G_{dB} = 0$.

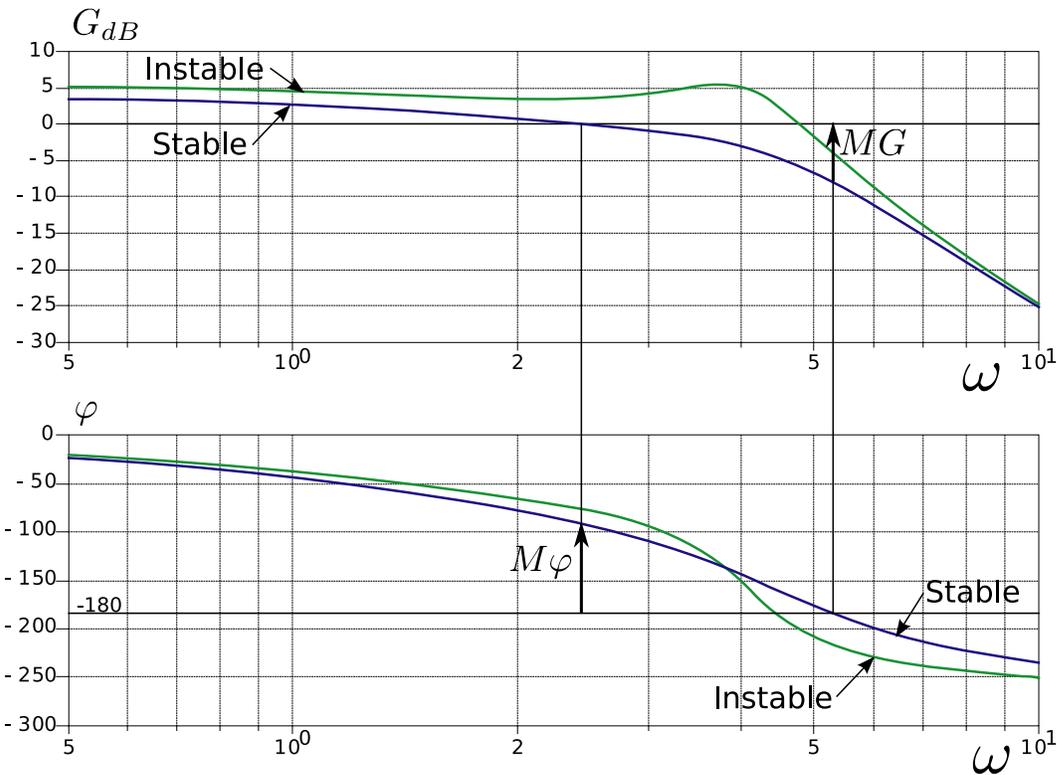


FIG. 6 – Lecture des marges de stabilité sur le diagramme de Bode.

3.4 Diagramme de Nyquist

3.4.1 Critère du revers

Critère du revers sur le diagramme de Nyquist

Un système est stable en boucle fermée si et seulement si en décrivant le lieu de transfert en boucle ouverte dans le sens des pulsations ω croissantes, le point critique -1 est laissé à **gauche** du lieu.

3.4.2 Marges de gain et de phase

Les marges définies sur le diagramme de black peuvent se lire sur le diagramme de Nyquist. Dans le plan complexe, la phase se lit comme un angle et le gain (le module) comme un rayon.

La marge de phase est donc l'angle entre le point de la courbe tel que le rayon soit unitaire ($G_{dB} = 0$) et 180° (argument de -1).

La marge de gain correspond à la distance V entre l'origine et le lieu de la courbe tel que $\varphi = -180^\circ$, c'est à dire le point d'intersection avec l'axe des réels, du coté des négatifs. Il faut ensuite convertir cette distance en décibel par la relation :

$$MG = -20 \cdot \log |H(j\omega_{\varphi=-\pi})| = -20 \cdot \log(V) = 20 \cdot \log\left(\frac{1}{V}\right)$$

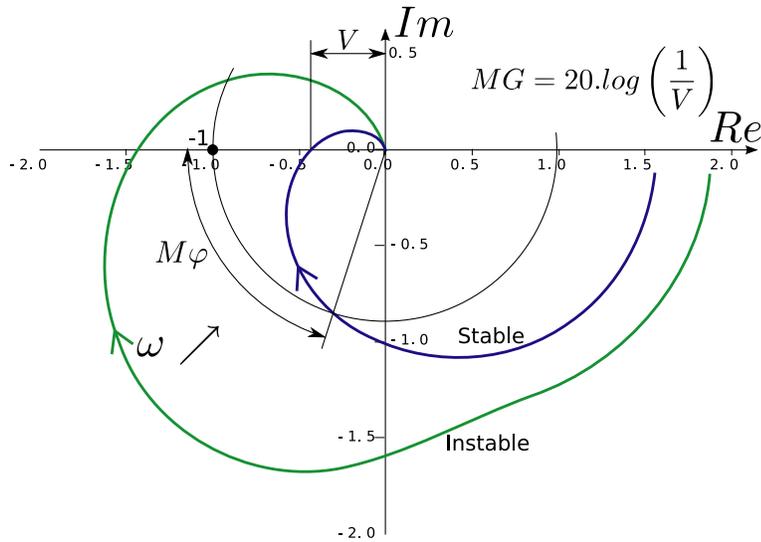


FIG. 7 – Lecture de la stabilité sur le diagramme de Nyquist.

4 Complément : Critère de Nyquist

4.1 Principe de l'argument (ou théorème de Cauchy)

Énoncé :

Soit C un contour simple fermé parcouru dans le sens direct. Soit f une application rationnelle de \mathbb{C} dans \mathbb{C} analytique sur C et à l'intérieur de C , sauf éventuellement en un nombre fini de pôles à l'intérieur de C ; de plus, l'application f ne s'annule pas sur C . Alors :

$$\Delta \arg f(z) = (Z - P)2\pi$$

$\Delta \arg f(z)$ est la variation de l'argument de $f(z)$; Z et P sont respectivement les nombres de zéros et de pôles de f à l'intérieur de C , en comptant leur multiplicité.

Démonstration :

Exprimons $f(z)$ sous la forme factorisée suivante, faisant apparaître les pôles p_i et les zéros z_i :

$$f(z) = K \cdot \frac{\prod_{j=1}^m (z - z_j)}{\prod_{i=1}^n (z - p_i)}$$

L'argument de $f(z)$ s'écrit alors :

$$\arg f(z) = \sum_{j=1}^m \arg(z - z_j) - \sum_{i=1}^n \arg(z - p_i)$$

Lorsqu'un zéro z_i ou un pôle p_i est à l'intérieur du contour C , parcourir C revient à tourner d'un tour autour du zéro ou du pôle (figure 8), si bien que l'argument de $(z - z_i)$ ou $(z - p_i)$ augmente de 2π . Ce n'est pas le cas pour un zéro ou un pôle à l'extérieur de C .

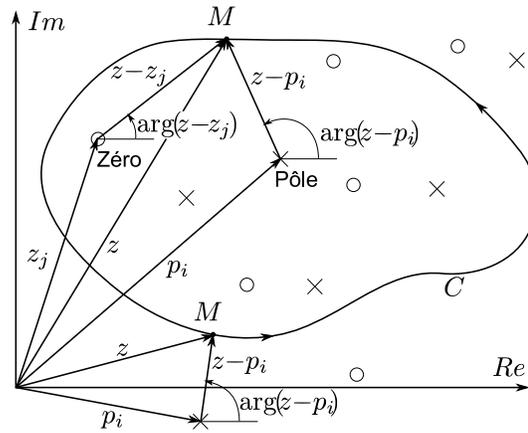


FIG. 8 – Variation de l’argument de $f(z)$ lorsque M décrit le contour C .

On en déduit l’égalité : $\Delta \arg f(z) = (Z - P)2\pi$.

Interprétation graphique :

Concrètement, ce théorème montre que l’image du contour C (décrit dans le sens trigonométrique) par l’application f sera une courbe fermée entourant $N = Z - P$ fois l’origine (dans le sens trigonométrique) (figure 9).

La forme de la courbe image donne donc une indication graphique sur le nombre de zéros et de pôles de la fonction.

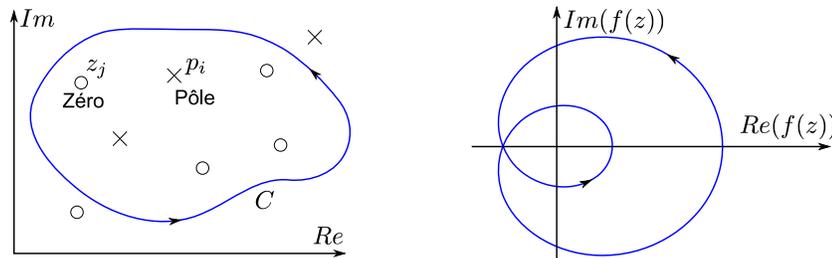


FIG. 9 – Si le contour C contient 4 zéros et 2 pôles, l’image du contour C par f tourne de $N = 4 - 2 = 2$ tours autour de l’origine (N positif donc le sens de rotation est le même).

4.2 Application à la recherche des pôles à partie réelle positive

Le principe de l’argument peut être utilisé pour rechercher s’il existe des pôles à partie réelle positive pour une FTBF. Il suffit pour cela de considérer le contour de *Bromwich* entourant l’ensemble du demi-plan complexe à partie réelle positive (figure 10).

La puissance du critère de Nyquist réside néanmoins dans sa capacité à prévoir la stabilité d’un système en boucle fermée à partir de l’expression de la boucle ouverte.

Considérons le système asservi de la figure 11. La fonction de transfert en boucle fermée s’écrit :

$$FTBF = \frac{H(p)}{1 + H(p)K(p)} = \frac{H(p)}{1 + FTBO(p)}$$

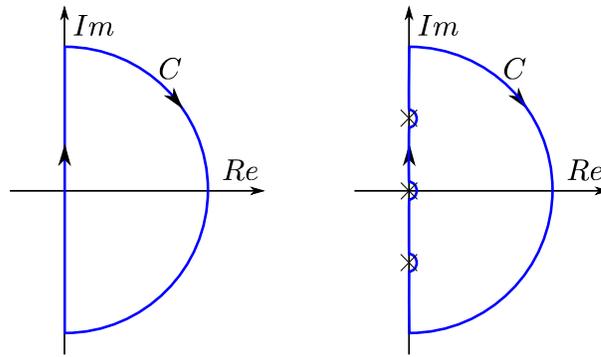


FIG. 10 – Contour de Bromwich couvrant le demi-plan réel positif (à gauche) - Le cercle est de rayon infiniment grand. Lorsqu'il existe des pôles sur l'axe des imaginaires purs (à droite), ils sont contournés à droite par un demi-cercle de rayon infiniment petit.

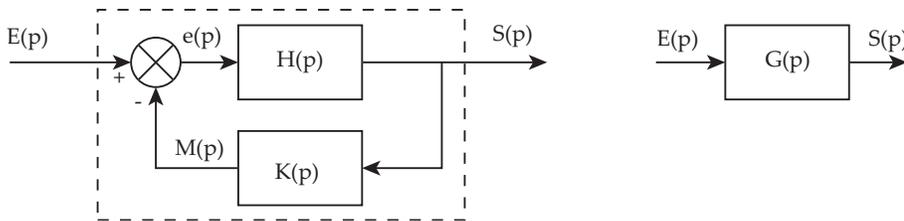


FIG. 11 – Schéma bloc d'un système asservi classique.

Compter les pôles de la FTBF inclus dans le contour de Bromwich revient à compter les zéros de l'application $1 + FTBO(p)$. Pour que la FTBF soit stable, il faut donc que l'application $1 + FTBO(p)$ n'ait aucun zéro à partie réelle positive ($Z = 0$), c'est à dire que l'image du contour de Bromwich par l'application fasse un nombre de tour $N = -P$ autour de l'origine (figure 12).

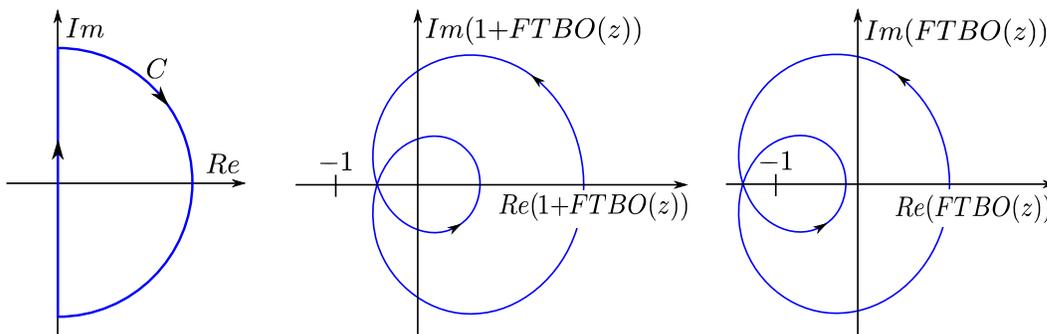


FIG. 12 – Contour de Bromwich et images du contour par les applications $FTBO$ et $1 + FTBO$.

Or, l'image du contour C par l'application $1 + FTBO(p)$ n'est qu'une translation par le vecteur $(1, 0)$ de l'image du même contour par l'application $FTBO(p)$... De même, les pôles des applications $1 + FTBO(p)$ et $FTBO(p)$ sont les mêmes... Et sachant que le contour de

Bromwich est décrit dans le sens horaire (sens des ω croissants), on peut donc ré-exprimer la condition :

Pour que la FTBF soit stable, il faut que l'image du contour de Bromwich par l'application $FTBO(p)$ fasse un nombre de tour $N' = P$ autour du point -1 , comptés dans le sens trigonométrique, où P est le nombre de pôles à partie réelle positive (instables) de la FTBO.

L'image du contour de Bromwich par l'application $FTBO(p)$ est appelée le *lieu de Nyquist*.

4.3 Critère de Nyquist

Énoncé :

Un système continu en boucle fermée est asymptotiquement stable à la condition nécessaire et suffisante que son lieu de transfert en boucle ouverte parcouru de $\omega = -\infty$ à $\omega = +\infty$ entoure le point critique dans le sens trigonométrique un nombre de fois égal au nombre des pôles instables de la fonction de transfert en boucle ouverte.

Cas où la FTBO est stable :

Dans la plupart des cas, la fonction de transfert en boucle ouverte est stable. Dans ce cas, elle ne présente aucun pôle instable ($P = 0$) et le contour de Nyquist ne doit pas entourer le point -1 pour que la FTBF soit stable.

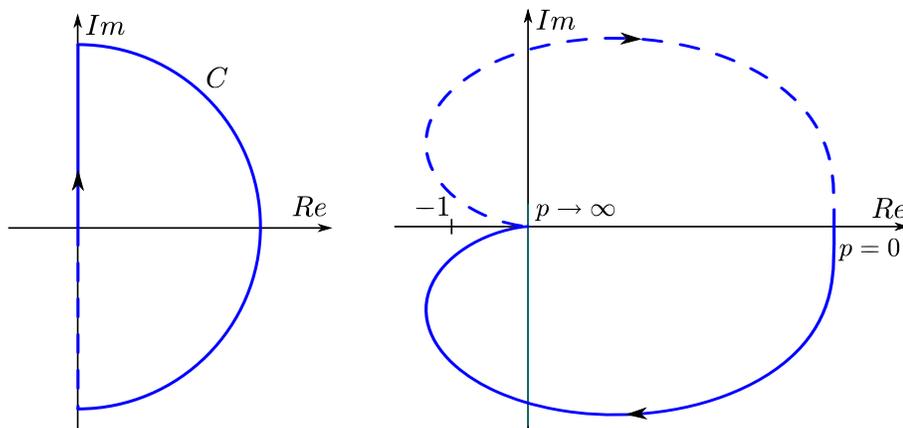


FIG. 13 – Contour de Nyquist pour une FTBO stable.

Exemple : soit une FTBO classique du second ordre $\frac{4}{p^2 + 0.5p + 1}$ ne présentant aucun pôle instable. La figure 13 montre le contour de Nyquist, avec en trait plein l'image de l'axe des imaginaires positif ($p = i.\omega$ avec $\omega > 0$) et en trait pointillés l'image de l'axe des imaginaires négatifs ($p = i.\omega$ avec $\omega < 0$).

Le contour n'entoure pas le point -1 donc la FTBF sera stable.

Il s'agit en réalité ici du critère du revers !

Cas où la FTBO est instable :

Lorsque le système est instable en boucle ouverte, la boucle de rétroaction peut stabiliser le système en boucle fermée.

Exemple : soit une FTBO classique du premier ordre $\frac{K}{p-1}$ présentant un pôle instable $p = 1$. La figure 14 montre le contour de Nyquist, avec en trait plein l'image de l'axe des imaginaires positif ($p = i.\omega$ avec $\omega > 0$) et en trait pointillés l'image de l'axe des imaginaires négatifs ($p = i.\omega$ avec $\omega < 0$).

Si $K = 0.5$, le contour n'entoure pas le point -1 et comme il existe un pôle instable en FTBO, la FTBF sera instable.

Si $K = 2$, le contour entoure une fois le point -1 dans le sens trigonométrique et comme il existe justement un pôle instable en FTBO, la FTBF sera stable.

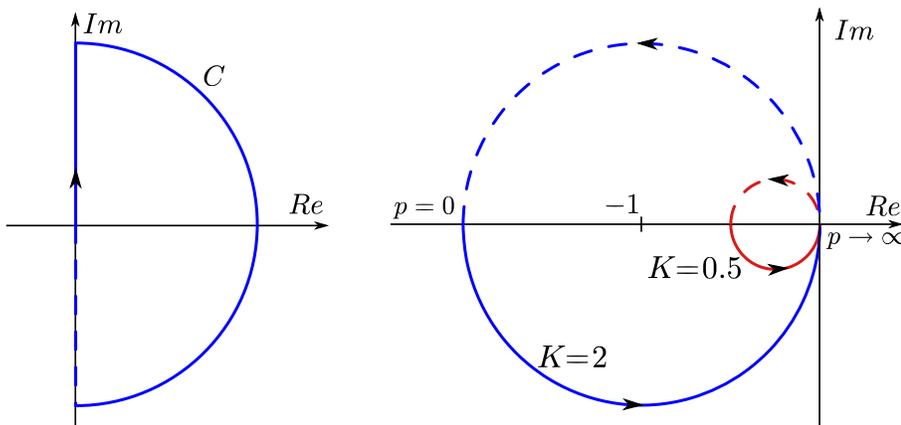


FIG. 14 – Contour de Nyquist d'une FTBO instable pour $K = 2$ et $K = 0.5$.

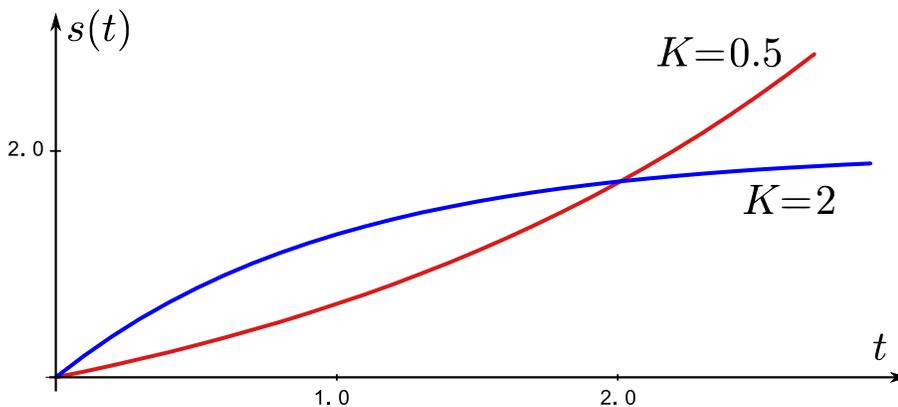


FIG. 15 – Réponses temporelles de la FTBF à une entrée en échelon pour $K = 2$ et $K = 0.5$.

On vérifie sur la réponse temporelle de la FTBF à un échelon (figure 15) que le système est stable pour $K = 2$ et instable pour $K = 0.5$.