Précision

1 Définition

La *précision* est caractérisée par l'*erreur* $\mu(t)$, différence entre la sortie $s(t)$ et la consigne $e(t)$:

$$\mu(t) = e(t) - s(t)$$

.

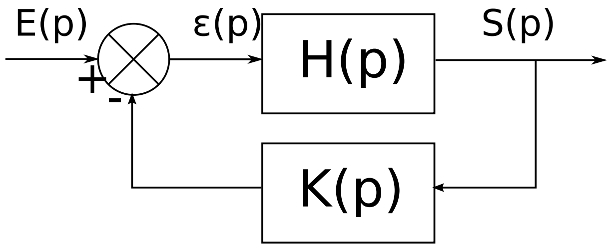

FIG. 1 – Schéma bloc type d'un système asservi.

L'erreur n'est définie que si la sortie est une grandeur de même nature que l'entrée.

On appelle *écart* $\varepsilon(t)$ la valeur en sortie du comparateur, qui n'est pas l'erreur, sauf dans le cas d'un retour unitaire.

On appelle *erreur statique* μ_s la limite à convergence de $\mu(t)$ lorsqu'elle existe :

$$\mu_s = \lim_{t \to +\infty} \mu(t)$$

Le système est dit *précis* si μ_s est nul. Si $\mu_s \neq 0$, le système *n'est pas précis* mais on peut néanmoins dire que le système est d'autant plus précis que μ_s est petit.

La précision se définit vis-à-vis du type d'entrée considérée. On distingue :

– La précision de position : Entrée en échelon $\frac{1}{p}$ (le système vise une valeur constante. μ_s est alors l'erreur de position.
– La précision de vitesse : Entrée en rampe $\frac{1}{p^2}$ (le système suit une valeur augmentant à vitesse constante. μ_s est alors l'erreur en vitesse, erreur de trainage ou de poursuite.
– La précision d'accélération : Entrée parabolique $\frac{1}{p^3}$ (le système suit une valeur uniformément accélérée). μ_s est alors l'erreur en accélération.

2 Calcul de la précision d'un système à retour unitaire

Sachant que tout système peut se ramener à un système à retour unitaire par opération sur les schémas blocs, nous allons limiter l'étude suivante au cas des systèmes à retour unitaire (figure 2).

On considère une fonction de transfert $H(p)$ sous la forme générale :

$$H(p) = \frac{K}{p^\alpha} \frac{1 + a_1.p + ... + a_n.p^n}{1 + b_1.p + ... + b_d.p^d}$$

– K est le *gain* de la chaîne directe,

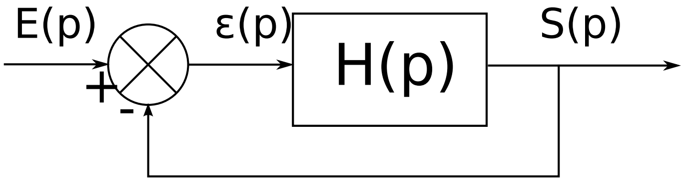

FIG. 2 – Système asservi à retour unitaire.

- α est la *classe* du système et représente le nombre d'intégration dans la chaîne directe.

Le système est testé à l'aide d'une entrée du type : $E(p) = \frac{1}{p^\beta}$

- $\beta = 0$: Dirac,
- $\beta = 1$: Échelon,
- $\beta = 2$: Rampe,
- $\beta = 3$: Parabole.

Calcul de l'erreur

D'après la formule de Black, $S(p) = \frac{H(p)}{1+H(p)}E(p)$ et $\mu(p) = E(p) - S(p)$. On en déduit :

$$\mu(p) = \frac{1}{1+H(p)}E(p) = \frac{1}{p^\beta + p^{\beta-\alpha}.K.\frac{1+...}{1+...}}$$

L'erreur statique est donc la limite :

$$\mu_s = \lim_{p\to 0} p.\mu(p) = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p^{\beta-1} + p^{\beta-\alpha-1}.K.\frac{1+...}{1+...}}$$

On distingue alors les cas suivant :

2.1 Entrée en Dirac

Si $\beta = 0$,

$$\mu_s = \lim_{p\to 0} \frac{p}{1 + p^{-\alpha}.K}$$

Le système bouclé est donc toujours précis pour une entrée en Dirac.

2.2 Entrée en Échelon

Si $\beta = 1$,

$$\mu_s = \lim_{p\to 0} \frac{1}{1 + p^{-\alpha}.K}$$

Si $\alpha = 0$, alors $\mu_s = \frac{1}{1+K}$ et le système n'est pas précis.
Si $\alpha > 0$, alors $\mu_s = 0$ et le système est précis.

2.3 Entrée en Rampe

Si $\beta = 2$,

$$\mu_s = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p + p^{1-\alpha}.K}$$

Si $\alpha = 0$, alors $\mu_s \xrightarrow[p \to 0]{} +\infty$. L'erreur est infinie et le système est donc non précis.
Si $\alpha = 1$, alors $\mu_s = \frac{1}{K}$ et le système n'est pas précis.
Si $\alpha > 1$, alors $\mu_s = 0$ et le système est précis.

2.4 Entrée en Accélération

Si $\beta = 3$,

$$\mu_s = \lim_{p \to 0} \frac{1}{p^2 + p^{2-\alpha}.K}$$

Si $\alpha < 2$, alors $\mu_s \xrightarrow[p \to 0]{} +\infty$. L'erreur est infinie et le système est donc non précis.
Si $\alpha = 2$, alors $\mu_s = \frac{1}{K}$ et le système n'est pas précis.
Si $\alpha > 2$, alors $\mu_s = 0$ et le système est précis.

2.5 Récapitulatif

On déduit des cas précédents le tableau récapitulatif des erreurs statiques (à retenir) en fonction du type d'entrée et de la classe du système :

type d'entrée	Dirac	Échelon	Rampe	Parabole
	1	$1/p$	$1/p^2$	$1/p^3$
Classe $\alpha = 0$	0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
Classe $\alpha = 1$	0	0	$\frac{1}{K}$	∞
Classe $\alpha = 2$	0	0	0	$\frac{1}{K}$

Une augmentation du gain K permet de réduire l'erreur lorsqu'elle est non nulle et bornée.

Ce tableau permettra de conclure sur la précision des systèmes sans nécessairement faire le calcul de l'erreur. Il souligne qu'un problème de précision peut être résolu en utilisant un correcteur intégrateur.

3 Influence des perturbations et traitement

Prenons le cas d'un système à retour unitaire perturbé par une perturbation $F(p)$ (figure 3).

Le système étant linéaire, la réponse totale $S'(p)$ s'écrit :

$$S'(p) = \underbrace{\frac{H(p)G(p)}{1 + H(p)G(p)} E(p)}_{\text{Réponse attendue } S(p)} - \underbrace{\frac{G(p)}{1 + H(p)G(p)} F(p)}_{\text{Modification due à la perturbation } M(p)}$$

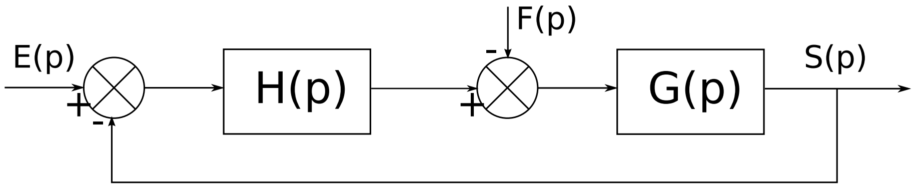

FIG. 3 – Système asservi soumis à une perturbation.

On cherche à caractériser $M(p)$ pour une perturbation $F(p)$ en échelon : $F(p) = F_0/p$.

$$m_0 = \lim_{t \to +\infty} m(t) = \lim_{p \to 0} p.M(p) = \lim_{p \to 0} p.\frac{-G(p)}{1 + H(p)G(p)}.\frac{F_0}{p}$$

En considérant que :

- $H(p)$ est une fonction de transfert de gain H_0 et de classe α,
- $G(p)$ est une fonction de transfert de gain G_0 et de classe β.

on obtient :

$$m_0 = \lim_{t \to +\infty} m(t) = \lim_{p \to 0} \frac{-G_0.F_0}{p^\beta + \frac{H_0.G_0}{p^\alpha}}$$

Si $\alpha = 0$, alors $m_0 = \frac{-G_0.F_0}{H_0.G_0}$ $\quad \forall \beta \geq 1$ et $m_0 = \frac{-G_0.F_0}{1+H_0.G_0}$ $\quad$ si $\beta = 0$

Si $\alpha = 1$, alors $m_0 = 0 \quad \forall \beta$

Le nombre d'intégrations *en amont de la perturbation* est décisif. Si un système est perturbé, ajouter une correction intégrale en amont de la perturbation permet de *rejeter la perturbation*.